

注入同期のロックレンジを最大化する入力信号波形

—CMOS リングオシレータを例として—

矢部 洋司<sup>†</sup>      西川 功<sup>†</sup>      中田 一紀<sup>†\*</sup>      守川 知行<sup>†</sup>  
 関屋 大雄<sup>††</sup>      安藤 芳晃<sup>†</sup>      田中 久陽<sup>†a)</sup>

Input Signal Waveforms for Maximal Injection-Locking Range  
 —An Application to CMOS Ring Oscillators—

Yoji YABE<sup>†</sup>, Isao NISHIKAWA<sup>†</sup>, Kazuki NAKADA<sup>†\*</sup>, Tomoyuki MORIKAWA<sup>†</sup>,  
 Hiroo SEKIYA<sup>††</sup>, Yoshiaki ANDO<sup>†</sup>, and Hisa-Aki TANAKA<sup>†a)</sup>

あらまし 注入同期により発振器の周波数安定性の向上が可能である。そのため様々な応用を念頭に盛んに研究が進められている。ところがわれわれの知る限り、注入同期の性能を最適化する理論や解析的設計手法は、これまで確立されていなかった。本論文において、注入同期の一つの物理的限界が存在し、これが実現可能であることを示す。具体的には CMOS リングオシレータを例として、実用上有用な発振器における引き込み周波数帯(ロックレンジ)の最大化が実現可能であることを理論的かつ数値的に検証する。

キーワード 注入同期, 引き込み周波数帯 (ロックレンジ), アドラーの方程式, CMOS リングオシレータ

1. ま え が き

近年の電子機器の高周波数化, 省電力化, 微細化にともない, 注入同期という古くからの基盤技術は現在の様々な応用にも有効に活用されている。注入同期とは自励発振系に外部信号を強制注入すると発振系が外部信号に同期する基本的な物理現象である。これを利用する技術は真空管時代に端を発し, 現在のミリ波等の高周波数帯での利用, 省電力設計, 回路の微細化の要請から, 更に進展している。例えば, 無線通信信号の低位相雑音化 [1] や無線電力伝送の安定化 [2] のための要素技術として, また CMOS リングオシレータそのものの周波数安定性向上も含め, 研究が盛んである [3]~[5]。

注入同期を現実の諸問題に適用するためには, 発振器の注入同期特性を解析し, 実際の設計に反映させる

が必要になる。従来の解析手法では, 発振器の弱非線形性や入出力波形が正弦波に近いという前提が必要であった [6]~[12]。しかし, 例えば多段の CMOS リングオシレータやパルス入力を含む注入信号源の多様化 (例として [13]) に対応するためには, より一般的かつ適用範囲の広い解析の枠組みが必要になってきている。これと独立に, 非線形振動論や非線形物理の分野では, 発振器の発振状態を, その発振位相について閉じた微分方程式に縮約する理論が構築され, 従来のアドラーの方程式の一般化に相当する枠組みが得られている (例として [14])。その結果, CMOS リングオシレータを含む強い非線形性をもつ発振器の位相ノイズ [15], [16] や注入同期 [17]~[20] についての解析が可能となっている。このアドラーの方程式の一般化により, この数年で注入同期の性能を最大化する理論的枠組みも整備され [21], [22], 注入同期の性能向上限界の存在も明らかになっている [23], [24]。

本論文は, 上記の理論的成果を援用し, 実用上有用な発振器の引き込み周波数帯を最大化する入力信号の設計が可能であることをはじめて示すものである。すなわち CMOS リングオシレータを対象として, 諸々の現実的制約条件のもとに, その引き込み周波数帯

<sup>†</sup> 電気通信大学, 調布市  
 The University of Electro-Communications, Chofu-shi, 182-8585 Japan

<sup>††</sup> 千葉大学, 千葉市  
 Chiba University, Chiba-shi, 263-0022 Japan

\* 現在, 広島市立大学

a) E-mail: htanaka@uec.ac.jp

(ロックレンジ) を最大化する注入信号が存在することをまず示し、具体的にこの信号を構成する。この結果より所与の発振器の注入同期に関する性能向上限界が明らかとなり、そこへどの程度近づくことが可能かという設計ガイドラインを議論する基礎が整備される。

## 2. 注入同期の解析手法

この章では、注入同期の解析を目的として本論文に直接関係する先行研究について概説する。注入同期の性能を評価する尺度として、ロックレンジ (locking range) は重要である。ロックレンジとは注入同期が成立する外部信号 (入力) の周波数帯域のことであり、これが広ければ、より柔軟かつロバストな注入同期が得られるからである。これを図 1 (a) に示す。ここで、縦軸の  $\Delta\omega$  は発振器の自励発振周波数と入力周波数の差 (離調) を表し、横軸は入力の強度を表す。この、くさび状のロックレンジ<sup>(注1)</sup>の外では、同期が成立せず利用不可能となる。以下では入力の強度が十分小さな、弱入力の場合を仮定する。この仮定は、先に述べたベースバンド通信などの現在の電子機器においても、入力 (電流) がデバイスを損傷しないために、また省電力性の要請からも、自然で合理的なものである。

### 2.1 従来知られている注入同期の解析手法

工学分野での注入同期の先行研究は、アドラー [6] に始まり、その後、大黒ら [7]、黒川 [8] と一般化が進み、かつ応用の対象も広がっている (例として [26]) が、その本質は、次のいわゆるアドラーの方程式により理解される。

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Delta\omega - \epsilon \sin \alpha \quad (1)$$

ここで  $\alpha$  は発振器の発振位相と入力信号の位相差を示し、 $\Delta\omega$  は離調、 $\epsilon$  は入力の強度に対応するパラメータを示す。これによって、ロックレンジが定まるのみならず、同期へ至る過渡状態や同期の安定性解析が可能になる。最近では、[12] により所与の発振回路をアドラーの方程式に帰着するエレガントな手法が提供されている。この先行研究の枠組みは、諸々の対象において有用である (例として [3]) が、その前提条件が発振器は弱非線形、あるいは入出力はほぼ正弦波と仮定しており、発振器の非線形性が強い場合や、入力が正弦波から大きく外れる場合には、その適用が一般に困難となる。

(注1)：非線形ダイナミクスの分野では、これをアーノルドタンクとよぶ。

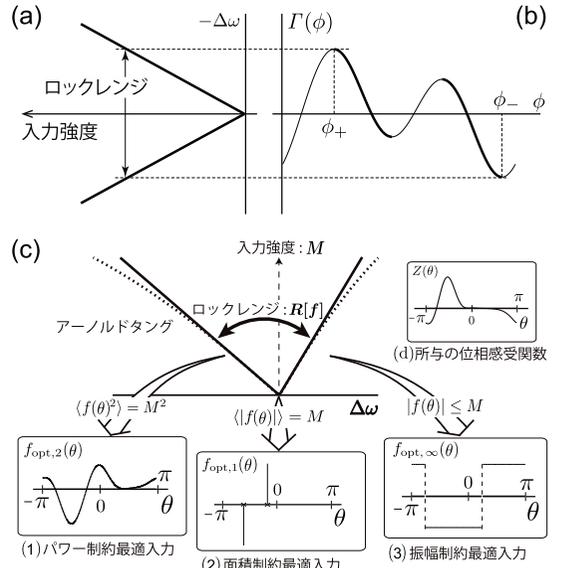


図 1 最適注入同期の概要. (a) ロックレンジ, (b) 位相結合関数, (c) 最適入力の様子.

Fig. 1 Schematic view of the optimal injection locking. (a) Locking range, (b) a phase coupling function, (c) optimal input waveforms.

### 2.2 位相方程式の導出と注入同期の解析

次にアドラーの方程式の一般化とみなされる、位相方程式の導出と、それによる注入同期の解析について説明する。ここで扱う発振器はリミットサイクル解をもつ非線形振動子とみなせる。その (回路) 方程式は一般に、次のように表現される。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{I}(t) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  は状態変数、 $\mathbf{I}(t) \in \mathbf{R}^n$  は周期的入力を表す。ここでは、簡単のため (一般性を失わず)、入力  $\mathbf{I}(t)$  は回路中の 1 点に注入される入力  $f(t) \in \mathbf{R}$  とする。このとき、リミットサイクル解を  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$  とすると、これに沿って発振位相に相当する  $\psi \in [0, 2\pi] \equiv S$  という (局所的な) 変数が導入される。その結果、入力  $f$  が弱入力という仮定の下で、式 (2) は  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  の近傍において次の  $\psi$  についての方程式に縮約される [14], [27]。

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + Z(\psi) \cdot f(t) \quad (3)$$

ここで、 $\omega$  は自励発振周波数、 $Z(\psi)$  は位相感受関数とよばれる周期関数である。更に入力の周波数を  $\Omega (\sim \omega)$  とすると、 $\psi$  に代わる変数  $\phi = \psi - \Omega t$  が定義される。

これは発振状態と入力の位相差に対応する「遅い」変数とみなされ、速い動きに関する平均化により、 $\phi$  について閉じた次の位相方程式が得られる [14], [27].

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega + \Gamma(\phi), \quad (4)$$

ただし  $\Gamma(\phi) = \langle Z(\theta + \phi)f(\theta) \rangle$ . ここで、 $\langle \cdot \rangle$  は  $\theta \equiv \Omega t$  についての 1 周期にわたる平均<sup>(注2)</sup>を示し、 $\Gamma(\phi)$  は位相結合関数とよばれる.

図 1 (b) はロックレンジの導出を説明している. 注入同期が成立するための必要十分条件は、 $\phi$  が  $d\phi/dt = 0$  かつ  $\Gamma'(\phi) < 0$  をみたすことであり、位相結合関数の最大値  $\Gamma(\phi_+)$  と最小値  $\Gamma(\phi_-)$  の範囲内に離調 ( $-\Delta\omega$ ) が入っていることが導かれる.

(3) 以上は、1 : 1 同期 (すなわち、 $\omega : \Omega \approx 1 : 1$ ) の場合であるが、同様のことが  $m : n$  同期 (すなわち、 $\omega : \Omega \approx m : n$ ) の場合に成立する. その場合の位相方程式は、

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega + \Gamma_{m/n}(\phi), \quad (5)$$

ただし  $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle$  となる.

式 (3) の局所変数  $\psi$  の存在や、式 (4) の位相方程式への縮約は数学的に厳密な結果であり [27], 非線形物理の分野でも独自に同等の結果が得られている [14]. 式 (1) のアドラーの方程式は式 (4) の最も簡単なケースとして導かれる. また、上記の位相感受関数  $Z$  は、これまで工学分野でも独自に導入されている [15], [18]. 実際に所与の発振器に対し位相方程式を導く際、この  $Z$  を正確にかつ効率良く求めることが重要である. これは例えば [17], [20] のような複雑な発振器に対しても、インパルス応答関数法 [28] により、回路シミュレーター (SPICE) から直接に、数値的に得ることが可能になっている.

### 3. ロックレンジを最大化する最適入力存在と構成法

以上の準備のもとで、注入同期を最適化する最適化問題が定式化される [21], [22]. 例えばロックレンジを最大化する場合は、以下のように考える [21]. まず、入力  $f$  に対し、正のロックレンジ  $R[f]$  を返す次の汎関数を定義する.

$$J[f] \equiv R[f] + \lambda \langle f(\theta) - C \rangle \quad (6)$$

(注2) : 具体的には、 $\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdot d\theta$  である.

ここで、 $R[f]$  は  $f$  に対し (図 1 (b) のように、一般に一意に定まる) ロックレンジを与え、具体的には

$$\begin{aligned} R[f] &= \Gamma(\phi_+) - \Gamma(\phi_-) \\ &= \langle \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\} f(\theta) \rangle \quad (7) \end{aligned}$$

と表示される. ここで  $\phi_+$  及び  $\phi_-$  は、それぞれ位相結合関数  $\Gamma(\phi)$  が最大・最小となる  $\phi$  を表している. また、 $\langle f(\theta) - C \rangle = 0$  は入力  $f$  の 1 周期平均が  $C$  となる制約条件であり、特に  $C = 0$  のときチャージバランス制約 [21], [22] とよばれる. その理由は、 $f$  を電流とみなすと注入される正味の電荷がゼロになるためである. また式 (6) の  $\lambda$  はラグランジュの未定乗数である. 要するに (6) により、 $\langle f(\theta) \rangle \equiv C$  という制約を満たす  $f$  のうち、 $R[f]$  を最大にする最適解  $f_{\text{opt}}$  を決めるための  $(f, \lambda)$  についての極値問題が定式化される. 以下では、簡単のため (一般性を失わず)  $C = 0$  と制約した場合を取り扱う.

式 (6)、式 (7) により定義された極値問題を考える際に、どのような入力を許容するかが重要な前提となる. 例えばパワー=一定とした入力、すなわち、 $\langle f^2(\theta) \rangle = \text{一定}$  という制約条件を課すと、その最適解  $f_{\text{opt}}$  は、変分法を用いて比較的容易に

$$f_{\text{opt}}(\theta) = \frac{1}{2\lambda} \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\} \quad (8)$$

と求まり、その極大性も確認される [21]. ここで  $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{Q/P}$ , ただし  $P = \langle f^2(\theta) \rangle$ ,  $Q = \langle \{Z(\theta + \phi_+) - Z(\theta + \phi_-)\}^2 \rangle$  であり、 $\phi_{\pm}$  は  $Z$  から導かれる非線形方程式より数値的に得られる [21].

また、パワー=一定の制約のもとで、ロックレンジを最大化する代わりに引き込み状態の (線形) 安定性を最大化することも可能である. この場合は  $R[f]$  の代わりに  $S[f] = -\Gamma'(\phi_*)$  として、その極値問題に帰着する [22]<sup>(注3)</sup>.

要するに、パワー=一定の制約の場合には、変分法 (オイラー・ラグランジュ方程式) が用いられ、これによる最適解は式 (8) の  $\phi_{\pm}$  に対し、一般に複数得られることも分かっていた [21], [22]. しかし、その他にも最適解があるのか、更にそれらの中でベストな最適解 (すなわち実現可能限界) とは何であるか、という疑問の解答は変分法によっては原理的に得られず、未解決のままであった.

(注3) : ここで  $\phi_*$  は (4) の定常解を示し、一般性を失わず  $0$  とおいてもよい.

ところが、最近の研究により、このベストな最適解の存在や非存在、更により広いクラスの制約条件下での最適解が議論でき、注入同期の物理限界の存在が明らかになってきている [23], [24]。例えば、以下の基本的問題は応用上も重要であるが、これらが解答可能となる。

**P1** パワー制約された入力 ( $\langle f^2(\theta) \rangle = P = \text{一定}$ ) に対し、1:1 同期のロックレンジを最大化するものは存在するか？ もし、存在するならば、それは唯一か？ また、その最大ロックレンジの物理的な意味はどのように特徴付けられるのか？

**P2** **P1** のパワー制約入力に代わり、面積制約された入力 (つまり、その値の絶対値の積分が一定値に抑えられた入力) に対し、1:1 同期のロックレンジを最大化するものは存在するか？あるいは振幅制約された入力 (つまり、その絶対値が一定値以内に抑えられた入力) の場合はどうか？ それらはどのように特徴付けられるのか？

**P3** **P1**, **P2** での 1:1 同期の最適化問題は、一般の  $m:n$  同期の場合にも解答可能か？もし、そうならば、その場合の最大ロックレンジはどのように特徴付けられるのか？ また、1:1 同期の場合とどのような関係があるのか？

これらの基本問題 **P1**, **P2**, **P3** に対し、ある意味で完全な解答の概要を (以下の **S1**, **S2**, **S3** において) 示す。その準備として、まず入力  $f$  の属すクラスとして  $p$  乗可積分な関数の空間  $L^p(S)$  を仮定する。

$$\|f\|_p \equiv \langle |f(\theta)|^p \rangle^{\frac{1}{p}} = M < \infty, \quad (9)$$

ただし、 $p \geq 1$  であり、 $M$  は正定数とする。特に  $p = 2$  の場合、式 (9) は  $\langle f^2 \rangle = M^2$ 、すなわち  $f$  のパワーが  $M^2$  に制約されることを示す。また、 $p = 1$  の場合、 $\langle |f| \rangle = M$ 、すなわち  $f$  の「面積」が  $M$  に制約される。一方、 $p = \infty$  では式 (9) は  $\|f\|_\infty = M$  に相当し、 $\|f\|_\infty$  は  $|f(\theta)|$  の本質的上限 (ess. sup) なので  $|f(\theta)| < M$  (殆んど全ての  $\theta \in S$ ) となる。要するに、これらの  $f$  には微分可能性や連続性も必要とせず、[21], [22] での変分法によるアプローチで暗黙に仮定していたよりも広いクラスの関数となっている。

更に、式 (9) に加え、先に述べたチャージバランス制約を導入する<sup>(注4)</sup>。

$$\langle f(\theta) \rangle = 0. \quad (10)$$

(注4) :  $\langle f(\theta) \rangle = C \neq 0$  とすることも可能であるが、ここでは簡潔さのために  $C = 0$  のみ取り扱う。 $C \neq 0$  の場合は別報に譲る。

以上のもとで、[21], [22] でのパワー制約のもとでの注入同期のロックレンジの最大化は、次の最適化問題として定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } R[f] \\ & \text{subject to } \langle f(\theta) \rangle = 0, \|f\|_p = M. \end{aligned} \quad (11)$$

これに、少し工夫をして、 $\|f\|_p = M$  のもとで  $J[f] = R[f] + \lambda \langle f(\theta) \rangle$  を最大化する  $f$  と  $\lambda$  を求める問題に焼き直すことができ、この  $J[f]$  は、式 (7) により次のように二つの関数  $f$  と  $g$  の内積として表示が可能である：

$$J[f] = \langle f(\theta) [\bar{Z}(\theta) + \lambda] \rangle \equiv \langle f(\theta) g(\theta) \rangle, \quad (12)$$

ただし  $g(\theta) = \bar{Z}(\theta) + \lambda$ ,  $\bar{Z}(\theta) \equiv Z(\theta + \Delta\phi) - Z(\theta)$  及び  $\Delta\phi \equiv \phi_+ - \phi_-$  であり、この  $\Delta\phi$  は変数  $\theta$  の座標変換  $\theta + \phi_- \rightarrow \theta$  により自然に導入された。

一方、同期状態の (線形) 安定性最大化は、式 (11) において  $R[f]$  を単に  $S[f] = -I'(\phi_*) = -\langle f(\theta) Z'(\theta) \rangle$  とおき換えればよい。したがって、この場合は式 (12) の  $g(\theta)$  を  $g(\theta) = -Z'(\theta)$  とおけば、同様の議論が可能となる [22], [23]。以下ではロックレンジ最大化の  $g(\theta) = \bar{Z}(\theta) + \lambda$  の場合に集中して考える。

[21], [22] では、この  $J[f]$  の最大化に変分法を用いたが、式 (12) に注目すると、この最大化問題は厳密に可解であることが判明する。そのキーとなるのが、次のヘルダーの不等式 (Hölder's inequality) [29] である。

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (13)$$

ただし、この  $p, q$  は  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  を満たす。この式 (13) より、式 (12) の  $J[f]$  を最大化することは、

$$\begin{aligned} J[f] &= \langle fg \rangle \leq \langle |fg| \rangle \\ &= \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q = M \|g\|_q \end{aligned} \quad (14)$$

において全ての等号が成立する入力  $f$  を、所与の  $g (= \bar{Z}(\theta) + \lambda)$  について求めることに帰着する。紙面の制約から詳細は [23], [24] に譲り、得られる結果を (先の **P1**, **P2**, **P3** にそれぞれ対応して) 以下に整理する。その大枠は、図 1 (c) の (1), (2), (3) に示すように、 $1 < p < \infty$  (特に  $p = 2$ ),  $p = 1$ ,  $p = \infty$  の 3 通りに分類される。おのおのの概要は以下のとおりである。

**S1**  $1 < p < \infty$  の場合、1:1 同期において、最適な入力 ( $\equiv f_{\text{opt}, p}$ ) が  $L_p(S)$  内で存在する。この

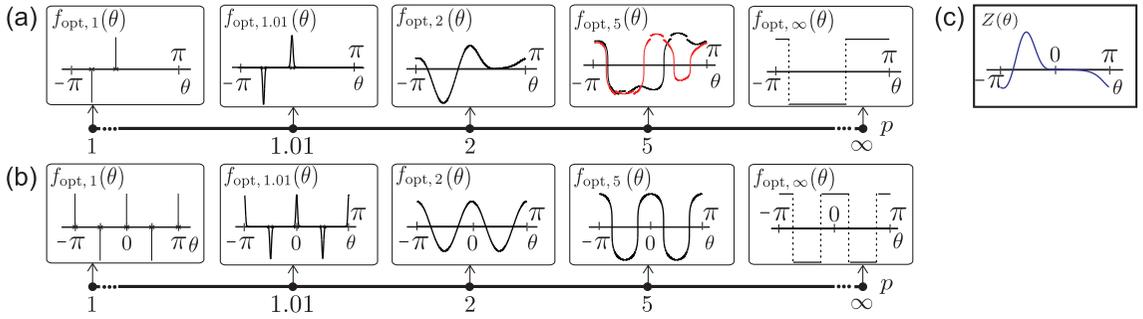


図2 最適入力波形の例。(a) 1:1同期, (b) 1:2同期, (c) 位相感受関数  $Z$  の一例。  
Fig.2 Examples of the optimal input waveforms. (a) 1:1 synchronization, (b) 1:2 synchronization, (c) a phase sensitivity function  $Z$ .

$f_{\text{opt}, p}$  は, 次式のように  $Z$  により陽に与えられる.

$$f_{\text{opt}, p}(\theta) = M \text{sgn}[g(\theta)] \left( \frac{|g(\theta)|}{\|g\|_q} \right)^{p-1}, \quad (15)$$

ただし,  $g(\theta) = \bar{Z}(\theta) + \lambda$ . このベストな最適入力に対応する最大ロックレンジとは, ヘルダーの不等式 (13) の右辺に他ならない. また, 式 (15) に含まれる二つのパラメータ  $\Delta\phi, \lambda$  は [23], [24] のアルゴリズムにより数値的に得られる.

**S2**  $p=1$  の場合の 1:1 同期においても, 最大ロックレンジに上限が存在する. すなわち一般的な  $Z$  に対し,  $L_1(S)$  内に次の形の正負一対のパルス入力

$$f_{\text{opt}, 1}(\theta) = M[\Delta(\theta) - \Delta(\theta + \Delta\phi_{\text{max}})], \quad (16)$$

$$\text{ただし, } \Delta(\theta + \Delta\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} (|\theta + \Delta\phi| \leq \epsilon \text{ なる } \theta), \\ 0 \text{ (その他の } \theta), \end{cases} \quad (17)$$

が存在し, このパルスの幅  $\epsilon$  を細くするにつれ, この上限にいくらかでも漸近可能である. 式 (16) のパルス入力の形状は上記の **S1** での最適入力 (式 (15)) における  $p \rightarrow 1$  の極限と整合し, このロックレンジの上限は, ヘルダーの不等式 (13) の右辺で  $p=1, q=\infty$  とおいたものに相当する. また,  $\Delta\phi_{\text{max}}$  は [23], [24] のアルゴリズムにより,  $Z$  より直に得られる.

一方,  $p=\infty$  の場合の 1:1 同期において, 次の形の最適入力

$$f_{\text{opt}, \infty}(\theta) = M \text{sgn}[\bar{Z}(\theta) + \lambda], \quad (18)$$

が  $L_\infty(S)$  内で存在し,  $Z$  により陽に表示され, **S1** の最適入力 (式 (15)) で  $p \rightarrow \infty$  の極限に一致する.

これに対応する最大ロックレンジは, ヘルダーの不等式の右辺で  $p=\infty, q=1$  とおいたものに相当する.

**S3** ここでは簡単のため  $Z, f$ , 及び以下で定義する  $Z_n, f_m$  はいずれもフーリエ級数表示が可能なクラス関数と仮定する:

$$Z(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_j (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta),$$

$$f(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_k (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta),$$

$$Z_n(\theta) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_j (a_{nj} \cos nj\theta + b_{nj} \sin nj\theta),$$

$$f_m(\theta) \equiv \frac{c_0}{2} + \sum_k (c_{mk} \cos mk\theta + d_{mk} \sin mk\theta)^{(\text{注5})}.$$

また対応する  $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle$  も,  $Z, f$  のフーリエ級数から項別積分により, フーリエ級数表示可能とする. このとき三角関数の積和の公式より  $\Gamma_{m/n}(\phi) = \langle Z_n(m\theta + \phi)f(n\theta) \rangle = \langle Z_n(m\theta + \phi)f_m(n\theta) \rangle$  である. この式は, **S1, S2** で得られている 1:1 同期の最適入力を得るアルゴリズムにおいて,  $Z$  を  $Z_n$  とおきかえるのみで一般の  $m:n$  同期の最適入力が 1:1 同期の  $f_{\text{opt}, p}(\theta)$  に対し, 上記の  $f_m(n\theta)$  の形で得られることを示している [23]<sup>(注6)</sup>.

以上の結果を, Hodgkin-Huxley ニューロンモデル [22], [27] を一例としてまとめたものが図 2 である. 図 2(a), 図 2(b) はそれぞれ 1:1 同期と 1:2 同期の最適入力を示すが, 1:2 の場合は 1:1 の場合に比べ波形がシンプルになっている. これは  $Z_n$  において, 図 2(c) に示す元の  $Z$  での高調波からの寄与が相対的に小さくなるためであり, 一般に  $n$  が大きくなるにつれこの傾向が顕著になる.

(注5): 直観的には  $Z_n, f_m$  はそれぞれ  $Z, f$  のフーリエ級数を  $n_j, m_k$  項のみ残して間引いたものである.

(注6): ただし,  $m:1$  同期の場合のみ例外的に, その最適入力が ( $m:m=1:1$  同期の場合と一致するため) 存在しないことになる. しかし, これが漸近的には, 1:1 同期の最適入力と一致するとみなすことは可能である.

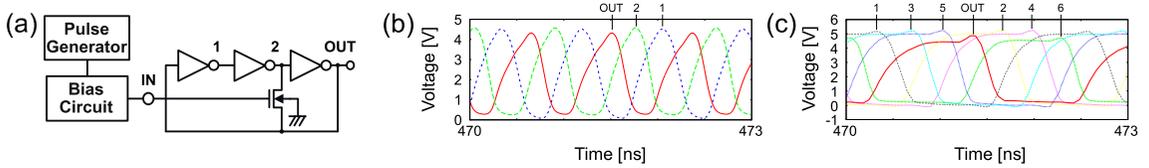


図3 対象とするリングオシレータ. (a) 回路構成, (b) 自励発振波形 (3段, バイアス電圧  $V_b = 2\text{ V}$ ). (c) 自励発振波形 (7段, バイアス電圧  $V_b = 2\text{ V}$ ).

Fig. 3 Relevant ring oscillators. (a) The circuit structure, (b) self-sustained oscillations (3 stages, bias voltage  $V_b = 2\text{ V}$ ), (c) self-sustained oscillations (7 stages, bias voltage  $V_b = 2\text{ V}$ ).

これらの結果により, **P1, P2, P3** への解答が得られた. その **S1, S2, S3** 及びこれらに関する最適化アルゴリズムの基礎として, 幾つかの定理が得られている [24]. そのご利益として, 先行研究 [21], [22] ではできなかったことが可能になる. それは例えば, 次の事柄である. (1) 「注入同期の物理限界」の存在証明・本質を示すこと, (2) パルス入力の取り扱い, (3) ロックレンジの最大化, 安定性の最大化, 一般の  $m:n$  同期での最適化問題が系統的に解答可能となること. 要するに, 以上により弱入力の場合の注入同期の実現可能限界が存在し, それを構成可能であることが明らかとなった.

#### 4. CMOS リングオシレータのロックレンジ最大化

以上で得られた最適化理論をもとに, 以下では CMOS リングオシレータの注入同期におけるロックレンジ最大化設計の一例を示す. ここでは [6]~[8] 等に倣い, まず発振器内のノイズの無視できる場合からはじめ, 後の 4.4 でノイズの存在する場合を取り扱い, ノイズの無視できる場合との整合性を検証する.

##### 4.1 CMOS リングオシレータとその問題点

CMOS リングオシレータは複数の遅延回路をリング状に接続した発振器である. 遅延回路の構成に応じて, 様々な回路が考えられる [3]~[5]. ここでは, 遅延回路として CMOS インバータを用いた回路を考える. その動作機構は, 各段の出力電圧を次段のゲート駆動電圧とし, ループ構成とすることで, 自励発振が持続的に生じることを利用するものである. 近年の半導体素子の集積微細化に伴い, CMOS デバイスを高周波数で駆動できるようになってきた. これにより CMOS リングオシレータを高速無線通信用のアナログフロントエンドとして搬送波生成等に応用する研究が進展している (例えば [3], [4]). しかし, CMOS リングオシレー

タには, それ自体の位相ノイズが大きいという問題や, 電源電圧の変動や温度の変化による周波数ドリフトのような発振周波数の安定性の問題が内在している.

##### 4.2 注入同期型 CMOS リングオシレータとその動作

上記の問題を解決するために, 注入同期を利用した回路が提案され実装されてきている. ここでは, 位相ノイズの小さい信号源を入力として用い, リングオシレータの出力信号の位相ノイズの低減と周波数変動の抑制が実現されている. 本研究では, 注入同期型リングオシレータとして, [3], [4] に倣い 3段構成のシングルエンド型インバータチェーンを対象とし, 更に比較検討のため, 同一デバイスパラメータの 7段のリングオシレータについても解析を行う. 図 3(a) に, nMOS ゲートによる入力段とバイアス回路を付加した回路構成を示す. ここで, 入力段の nMOS ゲートは, 入力信号の注入端子として機能し, リングオシレータの 2 段目と 3 段目のノードをつなぐ可変抵抗の役割を果たす. また, バイアス回路は, 入力段の電位レベル (動作点) を一定に設定するためのものである.

以下では, HSPICE による回路シミュレーションに基づいて解析を行う. 回路内の全ての MOS トランジスタのサイズは, ゲート長  $L = 1.6/1.2\ \mu\text{m}$ , ゲート幅  $W = 200/100\ \mu\text{m}$  (pMOS/nMOS) に設定した.

図 3(b) に, 3段のリングオシレータの場合の発振波形を示す. 図 3(b) 内の破線, 点線, 実線は, それぞれ 1 段目, 2 段目, 3 段目のインバータの出力波形 (図 3(b) の端子 1, 2, OUT 端子) を表す. このときリングオシレータの自励発振周波数は約 1.1GHz であった. 更に, 図 3(a) と同様の構成で, 7段のリングオシレータの 6 段目と 7 段目のノード間に入力段の nMOS ゲートを付加した場合の発振波形を図 3(c) に示す. 7 段のリングオシレータの自励発振周波数は約 450MHz であった.

図 4 (a), (b) に, パルス注入同期型 CMOS リングオシレータの位相感受関数  $Z$  を示す. これを取得するために回路シミュレータ (HSPICE) によりインパルス応答関数法 [28] を用いた.  $Z$  を取得する際に用いる単一のパルスは, 発振周期に対するパルス幅の比, すなわち Duty 比を 1% とし, 振幅を 0.1 V とした (このパルスは注入同期を意図するものでなく,  $Z$  を得るための仮想的な入力である). この設定は [15], [28] 等のルーチンによる. また, 各発振位相において, パルスを注入してから 100 周期経過後の位相のシフト量を入力パルスの面積で正規化することにより  $Z$  の値を得ている (その詳細は例えば [28] を参照のこと). 図 4 の結果より,  $Z$  の形状はバイアス電圧  $V_b$  の値に応じ大きく異なることがわかる. これは入力段の nMOS ゲートのゲート電圧に依存してドレイン-ソース間の電流が大きく変化することを反映している.

図 4 (c), (d) は, 3. の **S2** で述べた最適なパルス入力を示す. この入力の制約条件は式 (9) で  $p = 1$ ,  $M = 0.032\pi$  としたものである. この波形を特徴付ける  $\Delta\phi_{\max}$  は, [23], [24] のアルゴリズムにより  $Z$  から数値的に得られる. **S2** で述べたように, 理想的には限りなく細いパルスを想定しているが, ここでは入力電圧を  $\pm 0.4$  V としたために (数値シミュレーションの都合上) 幾分太いパルス (Duty 比=2%) と設定している. 一方, 図 4 (e), (f) は, 3. の **S1** で述べた制約条件 (9) で  $p = 2$  の場合 (ただし,  $M = 1$ ) の最適入力を示す. これらも [23], [24] のアルゴリズムにより  $Z$  から直に得られる.

理論的にロックレンジを求めることには, その結果の正しさの裏付けを与えるのみならず, 計算量を大幅に削減する利点がある. 理論では, 位相感受関数  $Z$  を一度得ることができれば, 任意の入力波形に対して, ロックレンジを即座に求めることができる. この  $Z$  は, HSPICE の過渡応答解析を 100 回程度くり返すことで求められる. 一方で, 回路シミュレーションからロックレンジを求める場合は, 入力の強度を一定とした上で周波数を掃引しながら時間波形を取得する. そして, この波形から同期・非同期を判定する. 具体的な手順は, まず自励発振周波数と等しい周波数を起点とし, そこから一定の粗い周波数ステップで入力の周波数を変化させ, 非同期状態を検出するまで掃引する. つぎに同期・非同期領域の境界では, 同期状態を検出した点と非同期状態を検出した点の中央の周波数において, 同期・非同期を新たに判定する. これを同期・非同期

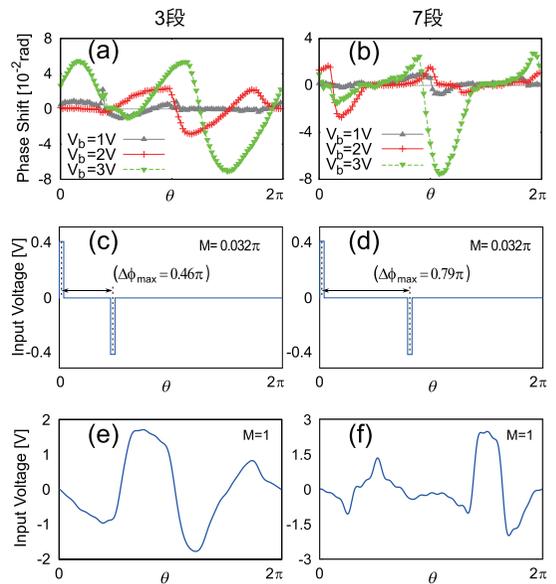


図 4 対象とする回路の位相感受関数  $Z$  及び入力波形の例. 図中の  $V_b$  はバイアス電位,  $M$  は式 (9) で定義される値,  $\Delta\phi$  は正負一対のパルスの位相差を示す. (a) 3 段の場合の  $Z$ , (b) 7 段の場合の  $Z$ , (c) 3 段の場合の最適パルス (面積制約) 入力波形, (d) 7 段の場合の最適パルス入力波形, (e) 3 段の場合の最適パワー制約入力波形, (f) 7 段の場合の最適パワー制約入力波形.

Fig. 4 Examples of the phase sensitivity function  $Z$  and input waveforms in the relevant circuits.  $V_b$  represents the bias voltage,  $M$  represents the value defined in Eq. (9), and  $\Delta\phi$  is the phase difference between a pair of positive and negative pulses. (a)  $Z$  for the 3-stage case, (b)  $Z$  for the 7-stage case, (c) the optimal pulse (area-reduced) input waveform for the 3-stage case, (d) the optimal pulse input waveform for the 7-stage case, (e) the optimal power-reduced input waveform for the 3-stage case, (f) the optimal power-reduced input waveform for the 7-stage case.

領域の境界のみで一定回数繰り返す. このように同期・非同期領域の境界付近では周波数ステップを細かくする一方, それ以外の箇所では周波数ステップを粗くするという手順をとることで効率的に掃引を行っている. このような手順を用いたとしても, 後述される各図のデータ点を得るためには, 入力 1 種類あたり HSPICE の過渡応答解析を 130 回程度くり返す必要がある.

#### 4.3 ロックレンジとその最大化

CMOS リングオシレータを無線通信向けの搬送波生成へ応用することを目的とした場合, 他の通信チャネルへの妨害を最小とするために, 発振波形の高調波

成分（スプリアス）を抑えることが必要になる．4.2の回路は，ある程度大きな注入信号により発振波形のひずみを生じ得るため，スプリアスの抑制には，注入信号を連続的な正弦波とするより，入力段のnMOSゲートがオンになる時間が短くなるパルス波が有効である[4]．これを踏まえ，本研究では注入信号として，おもにパルス波を想定し解析を行う．また，4.2の回路は，周波数分周器[3]と周波数通倍器[4]のいずれにも用いられるが，以下では紙面の制約により，通倍動作についての結果のみを示す．

まず図3の3段のリングオシレータを対象に，4.2で得られた $Z$ （図4(a))をもとに，注入信号を正弦波と正負一対のパルス入力とした場合のそれぞれの1:1同期のロックレンジの理論値を示す（図5(a))．その際，バイアス電位を $V_b = 2.0\text{ V}$ と設定した．正負一対のパルス入力，パルス間の位相差 $\Delta\phi$ の値により定まるが，この正負一対のパルスが最適入力となる $\Delta\phi_{\max}$ は， $f$ の制約条件を $\langle |f(\theta)| \rangle = M$ （一定）とした場合のアルゴリズム[23], [24]により与えられる．ここでは， $\Delta\phi = 0.46\pi (= \Delta\phi_{\max})$ と $\Delta\phi = \pi$ の2通りのパルス入力を対象とする．ここで，図5(a)の実線は式(4)による理論値， $\circ$ ， $\nabla$ ， $\diamond$ の各データ点は，それぞれに対応する異なる入力における回路シミュレーションの結果を示している．理論値とシミュレーション結果は例外なく整合し，特に小振幅のところでは高い精度で一致している．理論では入力 $f$ が弱入力であると仮定しているため，大振幅のところでは，理論値とシミュレーション結果に誤差が生じる．また，位相感受関数 $Z$ を取得する際のパルス幅が，理論的には無限小としているところを有限の幅としていることも，誤差が生じる原因となる．

次に，10通倍動作（10:1同期）の場合のロックレンジを示す（図5(b))．一般に $n$ 通倍動作の場合，発振器とおなじ周期をもつ波形を時間軸上で $n$ 倍に伸長する引き伸ばし入力とよばれる波形（図5(b)の $\diamond$ ），あるいは発振器の $n$ 周期のうち1周期のみ入力を与える間引き入力（図5(b)の $\nabla$ ， $\circ$ ）とよばれる波形（付録1.参照），が入力の候補として考えられる．例えば[4]の実験は，正弦波を入力する場合は引き伸ばし入力，パルスを入力する場合は間引き入力の信号を用いている．本研究においても，相互の比較のため同様の波形の構成を用いた．[4]の結果と同様に，正弦波の引き伸ばし入力（ $\diamond$ ）のロックレンジは著しく狭いことが認められる．なお，付録1.に記載の定理は，本

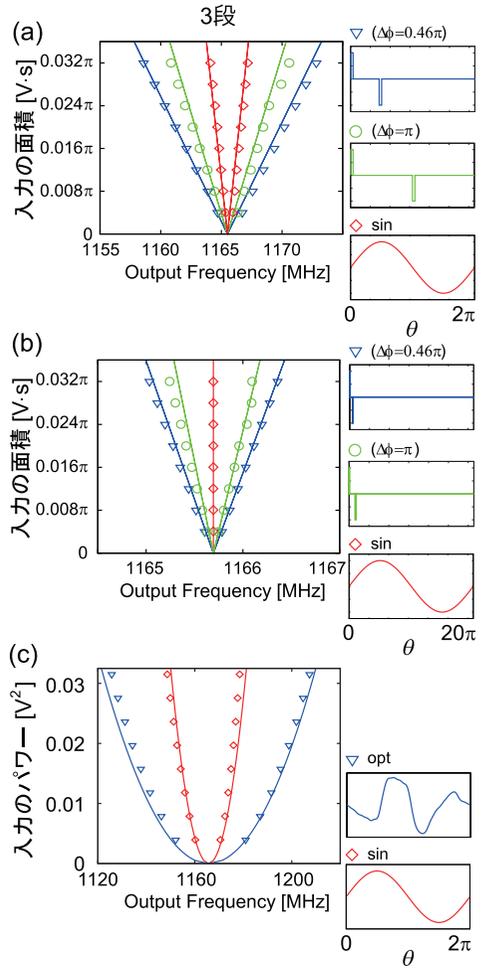


図5 3段のリングオシレータのロックレンジ．実線は理論値， $\nabla$ ， $\circ$ ， $\diamond$ のデータ点はそれぞれ図中の入力波形に対して得られるシミュレーション結果を示す．opt, sin はそれぞれ式(15)で $p = 2$ における最適入力，及び正弦波を表す．(a) 面積制約のもとでの1:1同期の場合，(b) 10:1同期（10通倍動作）の場合，(c) パワー制約のもとでの1:1同期の場合．

Fig. 5 Locking range of the 3-stage ring oscillators. The solid lines represent the theoretical values, the data points  $\nabla$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$  represent simulation results obtained for the input waveforms in this figure. opt and sin respectively represent the optimal input for  $p = 2$  in Eq. (15) and the sine wave.  $\Delta\phi$  is the phase difference between a pair of positive and negative pulses. (a) Cases of 1:1 synchronization for the area-reduced constraint, (b) cases of 10:1 synchronization (10th-order subharmonic injection locking), (c) cases of 1:1 synchronization for the power-reduced constraint.

論文ではじめて得られたものである。

また、1 : 1 同期の場合に入力のパワー一定 ( $\|f\|_2 = M$ ) の制約のもとでのロックレンジの理論値とシミュレーションの結果を示す (図 5 (c))。この場合、正負一対のパルス入力の場合のロックレンジは相対的に小さすぎるため、ここでは省いている。

以上の図 5 (a), (b), (c) のいずれにおいても、最適入力 ( $\nabla$ ) の最適性が認められる。

7 段のリングオシレータにおいて、以上の 3 段のリングオシレータの場合と同様にロックレンジを理論、シミュレーションの両方から求めた結果を図 6 に示す。バイアス電位を  $V_b = 2.0$  V と設定した。3 段のリングオシレータの場合と同様に、理論値とシミュレーション結果は例外なく整合し、特に小振幅のところでも高い精度で一致している。また、最適入力 ( $\nabla$ ) の最適性も明らかである。

以上の正負一対のパルス入力の最適性をより詳しく調べるために、正負のパルスの位相差  $\Delta\phi$  に対し、これに対応するロックレンジ  $R$  を求めた (図 7)。ここで、理論値は [23], [24] のアルゴリズムにより得られ、データ点は上記の数値シミュレーションから得られた。両者は高い精度で一致し、最適なパルス入力 ( $\Delta\phi_{\max}$  に相当) は、一定間隔のパルス入力 ( $\Delta\phi = \pi$ ) に比べ、3 段のリングオシレータの場合は約 1.6 倍、7 段のリングオシレータの場合は約 1.2 倍のロックレンジを実現することが認められた。

#### 4.4 注入同期時の位相ノイズの低減

4.3 では、先行研究 ([6]~[8] 等) を踏まえ、式 (2) で記述される状況、すなわち回路内のノイズが充分弱く無視可能な場合を取り扱った。この節では、回路に比較的弱いノイズが存在する場合を想定し、注入信号とノイズが共存する場合の先行研究 [15], [25] の設定にしたがい、位相ノイズなどについて得られる結果を示す。(位相ノイズの定義は付録 2. を参照)

[15], [25] にしたがって、回路方程式は 2. の式 (2) を踏まえ、

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + f(t) + \xi(t), \quad (19)$$

により与えられるとし<sup>(注7)</sup>、 $\xi(t)$  が発振器に影響するノイズ (白色ガウスノイズ) を表すとす。この式 (19) で記述される回路シミュレーションの概要は次のとお

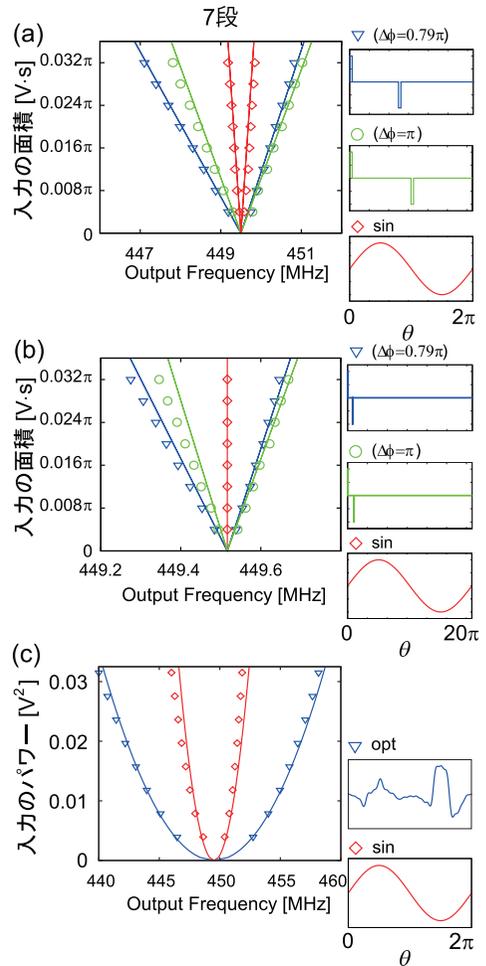


図 6 7 段のリングオシレータのロックレンジ。実線は理論値、 $\nabla$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$  のデータ点はそれぞれ図中の入力波形に対して得られるシミュレーション結果を示す。opt, sin はそれぞれ式 (15) で  $p = 2$  における最適入力、及び正弦波を表す。  $\Delta\phi$  は正負一対のパルスの位相差を表す。(a) 面積制約のもとでの 1 : 1 同期の場合、(b) 10 : 1 同期 (10 通倍動作) の場合、(c) パワー制約のもとでの 1 : 1 同期の場合。

Fig. 6 Locking range of the 7-stage ring oscillators. The solid lines represent the theoretical values, the data points  $\nabla$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$  represent simulation results obtained for the input waveforms in this figure. opt and sin respectively represent the optimal input for  $p = 2$  in Eq. (15) and the sine wave.  $\Delta\phi$  is the phase difference between a pair of positive and negative pulses. (a) Cases of 1 : 1 synchronization for the area-reduced constraint, (b) cases of 10 : 1 synchronization (10th-order subharmonic injection locking), (c) cases of 1 : 1 synchronization for the power-reduced constraint.

(注7) : [15] の p.185 の 10~12 行目, [25] の p.3169 の 9~11 行目に記載されている。

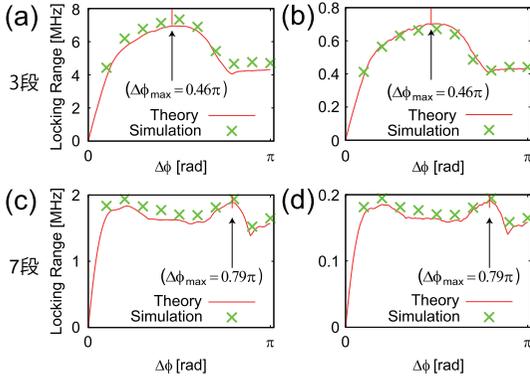


図 7 正負のパルスの位相差 ( $\Delta\phi$ ) とロックレンジの大きさ ( $R$ ) の関係。入力面積は  $M = 0.016\pi \text{ V}\cdot\text{s}$  とした。(a) 3 段のリングオシレータの 1 : 1 同期の場合、(b) 3 段のリングオシレータの 10 : 1 同期 (10 通倍) の場合、(c) 7 段のリングオシレータの 1 : 1 同期の場合、(d) 7 段のリングオシレータの 10 : 1 同期 (10 通倍) の場合。

Fig. 7 Relationships between the phase difference ( $\Delta\phi$ ) of positive and negative pulses and the magnitude ( $R$ ) of locking range. The area of the inputs is set at  $M = 0.016\pi [\text{V}\cdot\text{s}]$ . (a) Cases of 1 : 1 synchronization for the 3-stage ring oscillators, (b) cases of 10 : 1 synchronization (10th-order subharmonic injection locking) for the 3-stage ring oscillators, (c) cases of 1 : 1 synchronization for the 7-stage ring oscillators, (d) cases of 10 : 1 synchronization (10th-order subharmonic injection locking) for the 7-stage ring oscillators.

りである。対象とするのは、4.3 の 3 段と 7 段のリングオシレータと同一のものであり、そこに式 (19) の  $\xi(t)$  の項のみが追加される。ここでは特に断りがない限り、注入信号  $f(t)$  は高さ 0.4V,  $\Delta\phi = \Delta\phi_{\max} = 0.46\pi$  の正負一対のパルスとする。その際の数値積分は確率微分方程式 (ランジュバン方程式) に有効なもの (例として [30]) を採用し、 $\xi(t)$  の強度の設定は、数値積分の 1 ステップにおける、 $f(t)$  と  $\xi(t)$  の増分が相対的に同じ程度となるレベルとする。これはノイズが強過ぎず、かつ微弱過ぎて無視可能となることを避けるものである (詳細は付録 2. を参照)。

上記のシミュレーションを系統的に行った結果、観測される事実は次のとおりである。

**O1** 位相ノイズは、先行研究 [15], [25] などで行われているオフセット周波数  $\Delta f$  に対する  $\Delta f^{-2}$  のスケール則にしたがう (オフセット周波数の定義は付録 2. を参照)。

[15], [25] などでは白色ガウスノイズのもとでは、位相

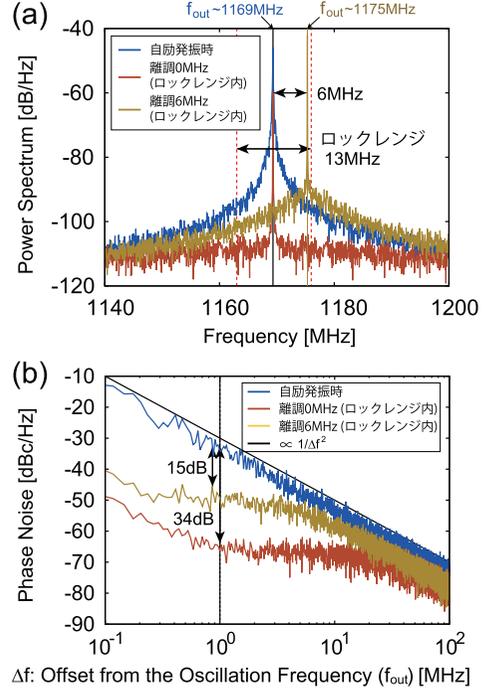


図 8 入力周波数がロックレンジ内の場合の位相ノイズの比較。(a) 発振 (出力) 波形のパワースペクトル。  $f_{\text{out}}$  はそれぞれの発振波形の基本周波数を表す。ロックレンジ (赤の点線) は、4.4 で定義されている。(b) 基本周波数からの周波数差  $\Delta f$  (オフセット周波数) での位相ノイズ。  $\Delta f = 1\text{MHz}$  の位置での位相ノイズの比較は、先行研究 [4], [25] にならっている。

Fig. 8 Comparison of the phase noise in the case where the input frequencies are in the locking range. (a) The power spectra of the oscillation (output) waveforms.  $f_{\text{out}}$  is the oscillation frequency of each oscillation waveform. The locking range (red dotted line) is defined in 4.4. (b) Phase noise at frequency difference  $\Delta f$  (offset frequency) from the oscillation frequency. The comparison of the phase noise at  $\Delta f = 1\text{MHz}$  is from previous studies [4], [25].

ノイズが (注入同期の成立している、していない場合のいずれにも)  $\Delta f^{-2}$  のスケール則にしたがう部分をもつことが示されている。4.4 の式 (19) におけるシミュレーションにおいても、このスケール則が認められ (図 8 (b), 図 9 (b) を参照), [15], [25] などの結果と整合することがわかる (注 8)。

**O2** 注入同期成立時には位相ノイズが低減する。ノイズの存在下で注入同期の成立・不成立を定義す

(注 8) : [15] の p.184 の最後の段落, [25] の p.3167 の Fig. 12 に記載されている。

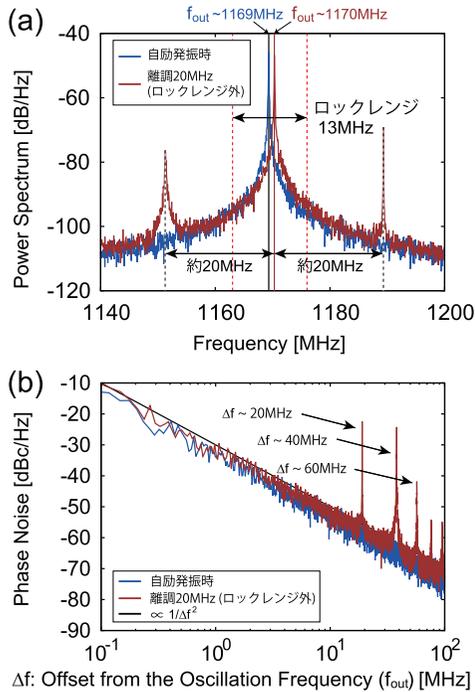


図9 入力周波数がロックレンジ外の場合の位相ノイズの比較。(a) 発振(出力)波形のパワースペクトル。 $f_{out}$  はそれぞれの発振波形の基本周波数を表す。ロックレンジ(赤の点線)は、4.4で定義されている。(b) 基本周波数からの周波数差  $\Delta f$  (オフセット周波数)での位相ノイズ。 $\Delta f = 20\text{MHz}$  の整数倍のところにピークが見られる [15]。

Fig.9 Comparison of the phase noise in the case where the input frequencies are out of the locking range. (a) The power spectra of the oscillation (output) waveforms.  $f_{out}$  is the oscillation frequency of each oscillation waveform. The locking range (red dotted line) is defined in 4.4. (b) Phase noise at frequency difference  $\Delta f$  (offset frequency) from the oscillation frequency. Peaks are observed at the integer multiples of  $\Delta f = 20\text{MHz}$  [15].

るためには、注入信号の周波数  $f_{inj}(\equiv \Omega/2\pi)$  と発振周波数  $f_{out}$  の差が充分小さいか否かを確認めればよい。ここでは  $|f_{inj} - f_{out}|/f_{inj} < 10^{-4}$  で注入同期が成立するとしている(この条件は任意性を含むものの、[31]などで理論的に妥当であることが知られている)。この注入同期の成立条件より図8(a)に示すロックレンジが定義される。まず、離調がロックレンジの内側に収まる場合を考える(ここでの離調は、ノイズの存在下で発振器の自然周波数と  $f_{inj}$  の差のことである)。離調が0MHz(離調無し)のとき、図8(a)の赤線のデータにおいて、パワースペクトルの形状に

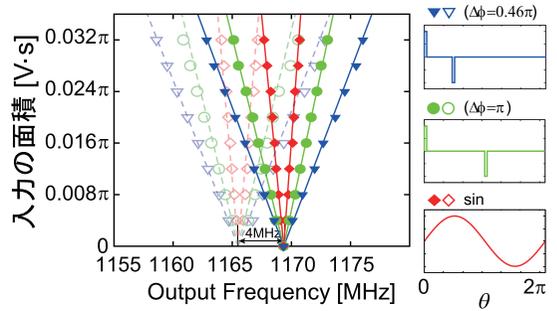


図10 3段のリングオシレータの、面積制約のもとでの1:1同期の場合のロックレンジ。 $\nabla$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$ のデータ点はそれぞれ図中の入力波形に対して得られるシミュレーション結果(ノイズなし)を示し、 $\blacktriangledown$ ,  $\bullet$ ,  $\blacklozenge$ のデータ点はそれぞれ図中の入力波形に対して得られるシミュレーション結果(ノイズあり)を示す。 $\Delta\phi$ は正負一対のパルスの位相差を表す。点線はノイズなしの場合の4.3で得られる理論値。

Fig.10 Locking range for cases of 1:1 synchronization under the area-reduced constraint in the 3-stage ring oscillators. The data points  $\nabla$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$  represent simulation results (with no noise) obtained for the input waveforms in this figure, while the data points  $\blacktriangledown$ ,  $\bullet$ ,  $\blacklozenge$  represent simulation results (with noise) obtained for the input waveforms in this figure.  $\Delta\phi$  is the phase difference between a pair of positive and negative pulses. The dotted lines represent the theoretical values in the case of no noise obtained in 4.3.

は、 $f_{out}$ の周りに著しく急なピークが確認できる。このパワースペクトルの裾野は、図8(a)の青線の入力無しの自励発振の場合に比べて低減する。次に、離調が6MHz(ロックレンジの境界内側)のとき、図8(a)の緑線のデータにおいて、パワースペクトルの形状には、 $f_{out}$ の周りに比較的急なピークが確認できる。更に、パワースペクトルの裾野は入力無しの場合に比べ低減する。また、図8(b)より、 $\Delta f = 1\text{MHz}$ におけるそれぞれの位相ノイズを比較すると、離調が0MHz(離調無し)で注入同期が成立しているときは位相ノイズが約34dBc/Hz低減し、離調が6MHzのとき、位相ノイズが約15dBc/Hz低減している。これらのことは、先行研究[25]の結果と一致する。一方、注入同期が成立していない場合、図9に示すように  $|f_{inj} - f_{out}| = \Delta f (\sim 20\text{MHz})$ の整数倍の値でパワースペクトル及び位相ノイズのピークが生じる。このことも[15],[25]の結果と整合している(注9)。

(注9)：引き込みの成立する場合は[25]のp.3172の20~22行目、引き込みの外れた場合は[25]のp.3172の16~20行目にそれぞれ記載されている。

**O3 4.3** でのノイズがない場合の異なる注入信号に対するロックレンジの大小関係は、比較的弱いノイズのもとでも同様に成立する。

図 10 に示すように、**4.3** での注入信号  $f(t)$  を  $\Delta\phi = \Delta\phi_{\max} = 0.46\pi$ ,  $\Delta\phi = \pi$  の二通りの正負一対のパルス、及び正弦波として、ロックレンジの大小関係 (図 5(a)) は、弱いノイズのもとでも同様に成立する。弱いノイズの存在する場合と存在しない場合では、発振器の自然周波数に若干の差が生じることが知られているが[31]、この周波数差は図 10 に示す例では 4MHz 程度となる。

以上に得られた **O1**, **O2**, **O3** の 1:1 同期のシミュレーション結果は、7 段のリングオシレータ、更に通倍動作 (10:1 同期) の場合にも同様に成り立つが、これらは紙面の制約により割愛する。なお、**O3** の観測結果は著者の知るかぎり、CMOS リングオシレータにおいてはこれまで報告されていないようである。

## 5. む す び

注入同期の性能を最大化する理論[23],[24]をもとに、実用上有用な発振器のロックレンジ最大化に適用する手続きを整備した。具体例として、CMOS リングオシレータに対し理論と系統的な数値シミュレーションによる解析を行った。その結果、1:1 同期のみならず、通倍動作 (10:1 同期) の場合にも、ロックレンジの最大化が可能となることが検証された。このロックレンジを最大化する最適入力設計の枠組みは、同期の安定性を最大化する入力的设计並びに回路自体の同期能力の向上にも応用可能であり[23],[24]、現在これらの結果を回路上で確認する検証実験を行っている。これらについては稿を改めて報告の予定である。

**謝辞** 本研究の一部は平成 27 年度文科省科研費補助金 (課題番号 26286086)、並びに電気通信普及財団研究調査助成を受けて行われた。本研究に関し、マイクロ波研究会の諸先生方、並びに本城和彦先生、高山洋一郎先生 (電通大)、藤島実先生、高野恭弥先生 (広島大) から貴重なアドバイスを戴きました。ここに改めて感謝いたします。

## 文 献

- [1] K. Kawasaki, Y. Akiyama, K. Komori, M. Uno, H. Takeuchi, T. Itagaki, Y. Hino, Y. Kawasaki, K. Ito, and A. Hajimiri, "A millimeter-wave intra-connect solution," IEEE ISSCC Digest of Technical Paper, pp.414–415, 2010.
- [2] C.M. Zierhofer and E.S. Hochmair "High-efficiency coupling-insensitive transcutaneous power and data transmission via an inductive link," IEEE Trans. Biomed. Eng., vol.37, no.7, pp.716–722, July 1990.
- [3] K. Yamamoto and M. Fujishima, "A 44- $\mu$ W 4.3-GHz injection-locked frequency divider with 2.3-GHz locking range," IEEE J. Solid-State Circuits, vol.40, no.3, pp.671–677, March 2005.
- [4] K. Takano, M. Motoyoshi, and M. Fujishima, "4.8GHz CMOS frequency multiplier with subharmonic pulse-injection locking," Proc. IEEE Asian Solid-State Circuits Conference, pp.336–338, 2007.
- [5] L.-H. Lu and J.-C. Chien, "A wide-band CMOS injection-locked ring oscillator," IEEE Microw. Wireless Compon. Lett., vol.15, no.10, pp.676–678, Oct. 2005.
- [6] R. Adler, "A study of locking phenomena in oscillators," Proc. IRE, vol.34, no.6, pp.351–357, 1946.
- [7] K. Daikoku and Y. Mizushima, "Properties of injection locking in the non-linear oscillator," Int. J. Electronics, vol.31, no.3, pp.279–292, Oct. 1971.
- [8] K. Kurokawa, "Injection locking of microwave solid-state oscillators," Proc. IEEE, vol.61, no.10, pp.1386–1410, Oct. 1973.
- [9] L.J. Paciorek, "Injection locking of oscillators," Proc. IEEE, vol.53, no.11, pp.1723–1727, Nov. 1965.
- [10] X. Zhang, X. Zhou, B. Aliener, and A.S. Daryoush, "A study of subharmonic injection locking for local oscillators," IEEE Microw. Guid. Wave Lett., vol.2, pp.97–99, March 1992.
- [11] B. Razavi, "A study of injection locking and pulling in oscillators," IEEE J. Solid-State Circuits, vol.39, no.9, pp.1415–1424, Sept. 2004.
- [12] 大平 孝, "疑似線形理論による発振回路注入同期現象の定式化—紙と鉛筆でロックレンジと Q ファクタを探求する," 信学論 (C), vol.J96-C, no.12, pp.454–462, Dec. 2013.
- [13] 堤 恒次, 津留正臣, 谷口英司, "複数のパルス信号を用いたサブハーモニック注入同期発振器," 信学技報, MW2011-180, March 2012.
- [14] Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer, Berlin, 1984.
- [15] A. Hajimiri and T.H. Lee, "A general theory of phase noise in electrical oscillators," IEEE J. Solid-State Circuits, vol.33, no.2, pp.179–194, Feb. 1998.
- [16] A. Demir, A. Mehrotra, and J. Roychowdhury, "Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol.47, no.5, pp.655–674, May 2000.
- [17] H.-A. Tanaka, A. Hasegawa, H. Mizuno, and T. Endo, "Synchronizability of distributed clock oscillators," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol.49, no.9, pp.1271–1278, Sept. 2002.
- [18] X. Lai and J. Roychowdhury, "Capturing oscillator injection locking via nonlinear phase-domain macro-models," IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.52,

- no.9, pp.2251–2261, Sept. 2004
- [19] P. Maffezzoni, “Analysis of oscillator injection locking through phase-domain impulse-response,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol.55, no.5, pp.1297–1305, June 2008.
- [20] T. Nagashima, X. Wei, H.-A. Tanaka, and H. Sekiya, “Locking range derivations for injection-locked class-E oscillator applying phase reduction theory,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol.61, no.10, pp.2904–2911, Oct. 2014.
- [21] T. Harada, H.-A. Tanaka, M.J. Hankins, and I.Z. Kiss, “Optimal waveform for the entrainment of a weakly forced oscillator,” *Phys. Rev. Lett.*, vol.105, no.8, 088301, 2010.
- [22] A. Zlotnik, Y. Chen, I.Z. Kiss, H.-A. Tanaka, and J.S. Li, “Optimal waveform for fast entrainment of weakly forced nonlinear oscillators,” *Phys. Rev. Lett.*, vol.111, no.2, 024102, 2013.
- [23] H.-A. Tanaka, “Synchronization limit of weakly forced nonlinear oscillators,” *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*, vol.47, 402002, 2014.
- [24] H.-A. Tanaka, “Optimal entrainment with smooth, pulse, and square signals in weakly forced nonlinear oscillators,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol.288, pp.1–22, 2014.
- [25] A. Elkholy, M. Talegaonkar, T. Anand, and P.K. Hanumolu, “Design and analysis of low-power high-frequency robust sub-harmonic injection-locked clock multipliers,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol.50, no.12, pp.3160–3174, Dec. 2015.
- [26] A. Buonomo, A.L. Schiavo, M.A. Awan, and M.S. Asghar, “A CMOS injection-locked frequency divider optimized for divide-by-two and divide-by-three operation,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol.60, no.12, pp.3126–3135, Dec. 2013.
- [27] F.C. Hoppensteadt and E.M. Izhikevich, *Weakly Connected Neural Networks*, Springer, New York, 1997.
- [28] 太田大輔, 田中久陽, 毎野裕亮, “同期現象の解析に必要な位相方程式の導出アルゴリズムに関する比較検討,” *信学論 (A)*, vol.J89-A, no.3, pp.190–198, March 2006.
- [29] G. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Second ed., Cambridge Mathematical Library, 1988.
- [30] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, pp.66–106, Springer, 2004.
- [31] K. Yoshimura and K. Arai, “Phase Reduction of Stochastic Limit Cycle Oscillators,” *Phys. Rev. Lett.*, vol.101, 154101, 2008.

## 付 録

### 1. 間引き入力の定義と得られる性質について

本文で述べたように、一般に所与の  $Z$  に対し、 $m : n$  同期の最適入力 が構成可能である。しかし、 $1 : 1$  同

期の最適入力をもとに以下で構成される  $m : 1$  同期の「間引き」入力は、 $1 < p < \infty$  では最適ではないものの、 $p = 1$  では例外的に最適入力と同等のロックレンジに漸近可能であることを以下に示す。

まず、 $1 < p < \infty$  での間引き入力  $f_{\text{clip}, p}(\theta)$  は次により与えられる。

$$f_{\text{clip}, p}(\theta) = \begin{cases} \frac{C}{M} f_{\text{opt}, p}\left(\frac{m}{n}\theta\right) = \\ C \operatorname{sgn}\left[g\left(\frac{m}{n}\theta\right)\right] \left(\left|g\left(\frac{m}{n}\theta\right)\right|/\|g\|_q\right)^{\frac{1}{p-1}}, \\ (-\pi \leq \theta \leq -\pi + 2\pi n/m \text{ なる } \theta), \\ 0, \quad (\text{その他の } \theta). \end{cases} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

この  $f_{\text{clip}, p}(\theta)$  を間引き入力とよぶ理由は、 $1 : 1$  同期の  $f_{\text{opt}, p}$  を  $m$  周期並べ、そのうちの  $m - 1$  周期分を間引き（すなわち 0 とする）、 $\|f_{\text{clip}, p}\|_p = M$  となるように振幅を増大することによる（図 A・1）。一方、チャージバランス制約 (10) :  $\langle f_{\text{clip}, p} \rangle = 0$  は自動的に満たされる。 $\|f_{\text{clip}, p}\|_p = M$  の制約により、式 (A・1) の  $C$  は、次のように  $C = m^{1/p} M$  と決まる。

$$\begin{aligned} \|f_{\text{clip}, p}\|_p^p &= C^p \int_{-\pi}^{-\pi + \frac{2\pi}{m}} \left(\frac{|g(m\theta)|}{\|g\|_q}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\theta \\ &= \frac{C^p}{\|g\|_q^q} \int_{-\pi}^{-\pi + 2\pi} |g(\bar{\theta})|^q \frac{d\bar{\theta}}{m} = \frac{C^p}{m} \equiv M^p, \quad (\text{A}\cdot 2) \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{\theta} = m\theta$ 。更に式 (5) と式 (A・1) より、次を得る。

$$\begin{aligned} \Gamma_{m/1}(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z(m\theta + \phi) f_{\text{clip}, p}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z(m\theta + \phi) \cdot \frac{C}{M} f_{\text{opt}, p}(m\theta) d\theta \\ &= \frac{C}{2\pi M} \int_{-\pi}^{-\pi + 2\pi} Z(\bar{\theta} + \phi) f_{\text{opt}, p}(\bar{\theta}) \frac{d\bar{\theta}}{m} \\ &= \frac{C}{mM} \Gamma_{1/1}(\phi) = m^{\frac{1-p}{p}} \Gamma_{1/1}(\phi). \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 3)$$

同様のことは  $p = \infty$  の場合にも成立する。すなわち、式 (A・1) において、 $\frac{C}{M} f_{\text{opt}, p}(m\theta)$  は  $f_{\text{opt}, \infty}(m\theta) = M \operatorname{sgn}[g(m\theta)]$  となり、その結果  $\Gamma_{m/1}(\phi)$  は  $\frac{1}{m} \Gamma_{1/1}(\phi)$  と得られる。

したがって、 $1 < p \leq \infty$  において、次の性質 (i) 及び (ii) が式 (A・3) より得られる：

(i)  $m : 1$  同期において式 (A・1) の間引き入力に対し、ロックレンジは  $1 : 1$  同期の最大ロックレンジと比べ、

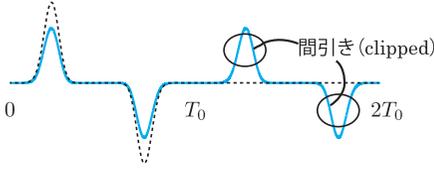


図 A.1  $m:n$  同期 (例:  $m=2, n=1$ ) における間引き (clipped) 入力の様式図. 青線は, 周期  $T_0$  の 1:1 同期の最適入力 (式 (15)) を  $m(=2)$  周期並べたものである. 黒の点線は, これに対応する間引き入力を示す.

Fig. A.1 Schematic illustration of a clipped input for  $m:n$  synchronization (e.g.,  $m=2, n=1$ ). The blue line represents  $m(=2)$  sets of the optimal input (Eq. (15)) for 1:1 synchronization of period  $T_0$ . The dotted line is the corresponding clipped input.

$1 < p < \infty$  の場合  $m^{\frac{1-p}{p}}$  の率で減少し,  $p = \infty$  の場合  $m^{-1}$  の率で減少する. 更に,

(ii)  $p \rightarrow 1$  の極限で, この減少率は 1 に漸近する. すなわち,  $m^{\frac{1-p}{p}} \rightarrow 1$  ( $p \rightarrow 1$ ).

以上の性質 (ii) は  $p=1$  の場合においても, 式 (A.1) のような間引き入力が最大ロックレンジを実現することを示唆している. 事実, このことは次のように確かめられる. 式 (A.1) と同様に,  $f_{\text{clip}, 1}$  を次のように構成する.

$$f_{\text{clip}, 1}(\theta) = \begin{cases} mM[\Delta(m\theta) - \Delta(m\theta + \Delta\phi_{\text{max}})], \\ (-\pi \leq \theta \leq -\pi + 2\pi/m \text{ なる } \theta), \\ 0, \text{ (その他の } \theta). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

この  $f_{\text{clip}, 1}$  に対し, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Gamma_{m/1}(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z(m\theta + \phi) f_{\text{clip}, 1}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi + \frac{2\pi}{m}} Z(m\theta + \phi) \\ &\quad \times mM[\Delta(m\theta) - \Delta(m\theta + \Delta\phi_{\text{max}})] d\theta \\ &= \frac{mM}{2\pi} \int_{-m\pi}^{-m\pi + 2\pi} Z(\bar{\theta} + \phi) \\ &\quad \times [\Delta(\bar{\theta}) - \Delta(\bar{\theta} + \Delta\phi_{\text{max}})] (d\bar{\theta}/m) \\ &\rightarrow (M/4\pi) [Z(\phi + \Delta\phi_{\text{max}}) - Z(\phi)] \\ &= \Gamma_0(\phi) \text{ (一様収束, } \epsilon \rightarrow 0), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ただし,  $\Delta\phi_{\text{max}}$  は 1:1 同期において, 式 (16) で与えられるパルス入力を最適とする  $\Delta\phi$  であり,  $\Gamma_0(\phi)$  はこれに対応する  $\Gamma(\phi)$  を表す. なお, 一様収束につ

いては [24] の Appendix F の証明による.

以上により, 次の性質 (iii) が得られる.

(iii)  $p=1$  の場合, 式 (A.5) の間引き入力 (パルス) に対するロックレンジは, パルス幅  $\epsilon$  が 0 の極限で (1:1 同期の) 最大ロックレンジに漸近する.

(注記: 一般に  $m:n$  同期の最大ロックレンジは 1:1 同期のそれを超えることはない. このことは  $1 < p < \infty$  については [24] の Lemma 1, 2 に示されており,  $p=1, \infty$  においても同様のことが成立する.)

以上をまとめ, 次の性質が得られる.

**定理**  $m:1$  同期において, 次を仮定する. まず,  $1 < p < \infty$  に対し,  $Z$  は ([24] の Theorem 1 に記載の) 滑らかな周期関数とする. また,  $p=1, \infty$  に対し,  $Z$  は [24] の Theorem 3 と 2 に記載の周期関数であるとする (本論文で対象とする  $Z$  は, 明らかにこれらの仮定を満足している). このとき, 以下が成立する.

(i)  $m:1$  同期において式 (A.1) の間引き入力に対し, そのロックレンジは 1:1 同期の最大ロックレンジと比べ,  $1 < p < \infty$  の場合は  $m^{\frac{1-p}{p}}$  の割合に減少し,  $p = \infty$  の場合は  $m^{-1}$  の割合に減少する.

(ii) また  $p \rightarrow 1$  の極限で, この減少率は 1 に漸近する. すなわち,  $m^{\frac{1-p}{p}} \rightarrow 1$  ( $p \rightarrow 1$ ).

(iii)  $p=1$  の場合, 式 (A.5) の間引き (パルス) 入力に対するロックレンジは, パルス幅  $\epsilon$  が 0 の極限で (1:1 同期の) 最大ロックレンジに漸近する.

## 2. 位相ノイズの定義と数値計算の方法について

位相ノイズは発振波形のパワースペクトルを次のように規格化することにより定義される (例として [15]):

$$L_{\text{total}}\{\Delta f\} = 10 \cdot \log \left[ \frac{P_{\text{sideband}}(f_{\text{out}} + \Delta f, 1\text{Hz})}{P_{\text{sig}}} \right] \quad (\text{A.6})$$

ここで  $P_{\text{sig}}$  は信号の全パワー (1 周期ごとのエネルギー),  $P_{\text{sideband}}(f_{\text{out}} + \Delta f, 1\text{Hz})$  は発振周波数  $f_{\text{out}}$  からの周波数差, すなわちオフセット周波数が  $\Delta f$  の周波数を中心とする幅 1Hz 帯域幅内のパワーを表す.

4.4 の式 (19) に対し, ノイズ  $\xi(t)$  を平均 = 0, 分散 =  $8.0 \times 10^{-14}$  と設定し, その数値積分は, [30] に記載の確率微分方程式に有効な方法を HSPICE 上で用いている. 具体的には, (無次元量である) 時間刻み幅  $h$  を  $h = 2.0 \times 10^{-12}$  と固定し, [30] にしたがって, 時間刻み幅ごとの  $\xi(t)$ , 入力  $f(t)$  の増分をそれぞれ  $\xi(t)\sqrt{h}$ ,  $f(t)h$  と設定している. 両者の大小関係は, 図 A.2 に

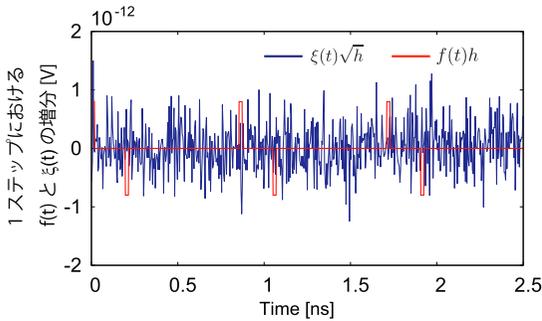


図 A.2 数値積分の 1 ステップにおける,  $f(t)$  と  $\xi(t)$  の増分.

Fig. A.2 The increments of  $f(t)$  and  $\xi(t)$  at one steps of the numerical integration.

示すとおり, ほぼ同等のオーダーであり, ノイズの強度が妥当であることがわかる (紙面の制約により, 4.4 では  $\xi(t)$  の平均 = 0, 分散 =  $8.0 \times 10^{-14}$  の入力ノイズの場合の結果のみ示すが, 分散 =  $1.3 \times 10^{-13}$  においても同様の結果が得られる).

(平成 27 年 9 月 21 日受付, 28 年 1 月 10 日再受付, 5 月 12 日公開)



矢部 洋司 (正員)

2012 電通大・電気通信・電子卒. 2014 同大学院修士課程修了. 同年より, 新光電子 (株) 勤務. 2015 より, 電通大学院博士課程に在学中. CMOS リングオシレータの注入同期能力の最適化に関する研究に従事.



西川 功 (正員)

2006 東大・教養・基礎科学科卒. 2008 京大大学院情報学研究科修士課程修了. 2011 東大大学院情報理工学系研究科博士課程修了. 博士 (情報理工学). 同年より, 東大生産技術研究所特任助教. 2015 電通大学院情報理工学研究科研究員, 現在に至る.

非線形物理を専門とし, 非平衡協同現象の数理的解析及び, 注入同期現象や自律分散通信ネットワークなどに対する工学的応用研究に従事. 2011 東大情報理工学系研究科修了者副総代.



中田 一紀 (正員)

1999 北大・理・数学卒. 2002 同大学院工学研究科修士課程修了. 2005 同大学院工学研究科博士課程修了. 博士 (工学). 同年より, 九工大大学院生命体工学研究科研究員/助手 2007~2010 同大学院生命体工学研究科助教. 2008 ドイツフ라운ホフファー研究所客員研究員. 2011 九大稲盛フロンティア研究センター学術研究員. 2013 同大学院理学研究院物理学部門学術研究員. 2013 電通大学院情報理工学研究科研究員, 現在に至る. 半導体集積デバイス, 磁性体集積デバイス, 及び自律分散通信ネットワーク上に生じる非平衡協同現象の機能的役割の数理的解析及びその工学的応用の研究に従事.



守川 知行

2013 電通大・電気通信・情報工卒. 2015 同大学院修士課程修了. 同年, NEC ソリューションイノベータ (株) 入社, 現在に至る. 在学中はベキ分布を示すシステムと Tsallis エントロピーの研究に従事.



関屋 大雄 (正員)

1996 慶大・理工・電気卒. 2001 同大学院博士課程修了. 同年千葉大・大学院自然科学研究科・助手. 現在, 同大学院融合科学研究科・准教授. 2007~2009 Wright State University 訪問研究員. 主として, 電力増幅器, 通信の信号処理に関する研究に従事. 博士 (工学). 2008 船井情報科学奨励賞, 同年安藤博記念学術奨励賞, 同年エリクソンヤングサイエンティストアワードをそれぞれ受賞. IEEE シニア会員, 情報処理学会, 信号処理学会各会員.



安藤 芳晃 (正員)

1995 千葉大・工・電気電子卒. 1997 同大学院工学研究科修了. 2000 同大学院大学院自然科学研究科修了. 博士 (工学). 2000 電気通信大学助手, 2005 助教授 (現在, 情報理工学研究科准教授). 電磁界解析, 計算電磁気学, 及び電磁界問題の最適化に関する研究に従事.



田中 久陽 (正員：シニア会員)

1990 早大電気卒. 1992 同大学大学院理工学研究科修士課程修了. 1995 同大学院理工学研究科博士後期課程修了. 博士(工学). 同年より, 日本学術振興会特別研究員(PD). 1996 カリフォルニア大バークレー校客員研究員. 1997 ソニーコンピュータサイエンス研究所研究員. 2001 電通大電気通信学研究科助教授(現在, 情報理工学研究科・准教授), 現在に至る. 情報通信システム, 非線形物理等の分野横断的領域の研究に従事. 2006, 2007, 2009 第 22 回電気通信普及財団賞(テレコムシステム技術賞), 第 23 回, 第 25 回電気通信普及財団賞(テレコムシステム奨励賞) 各受賞. 2015 電子情報通信学会平成 27 年度 NOLTA ソサイエティ功労賞受賞. 著書に「非線形ダイナミクスとカオス数学的基礎から物理・生物・化学・工学への応用まで」(中尾裕也, 千葉逸人と共訳 2015) 等がある.