社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

同期・引き込み現象と変分解析　～ 非線形理論のひとつの飯の食い処 ～

田中　久陽†

† 電気通信大学 情報理工学研究科
東京都 調布市 調布ヶ丘 1-5-1
E-mail: †htan@ee.uec.ac.jp

あらまし　集団同期・引き込み現象に関し，最近 10 年で生体・実験系からの検証例が急増している．また基礎となる理論も数学的に一層深化してきた．ところが，この同期・引き込みを制御し，使いこなすための手法・理論は，現状未開拓な部分が多い．本稿では，最近のこの方向でのひとつの新しい取り組みを紹介する．すなわち，変分解析というエネルギー論的視点を同期・引き込み現象に導入することにより，非線形理論の「ひとつのメシの食い処」が現れることを解説する．

キーワード　非線形問題、同期、引き込み、変分解析

1. はじめに

14 年前，著者は「同期現象の科学の最近の進展」[1] と題して，当学会誌に集団同期・引き込み現象の研究状況と課題を紹介させて戴く機会をもった．その当時の状況は，先駆的な理論研究が実験系での研究に先行しており，理論の予想にマッチする実験データを発見しようとする動きがむしろメジャーではなかっただろうか．

ところが，この 10 年（筆者が，アドホック・センサネットワークの研究に没頭していた間）に，状況は何となく逆になってきたようだ．すなわち，実験系から同期現象のデータ（特に，位相応答曲線．以下では $Z(\psi)$ と記載する.）が多数得られるようになり，モデリングや理論はむしろそれらに追従しているようにさえ見える．

この流れの中で，特に顕著なブレークスルーとして，次の 3 点が挙げられるだろう．

- 集団同期・引き込み現象に対し，正面からこれを制御し，使いこなそうとする手法と理論，さらにその実験検証の登場 [2]
- 共通ノイズへの引き込みのように，これまでの「引き込み」の枠組みを拡張する動向 [3]
- 集団同期の基礎を与える数学理論の深化 [4]

以上の 3 点は，それぞれ互いに関連するものでもあり，今後もその延長上に発展と深化が進むであろう．

一方，上記の 14 年前の拙文で，つつましく予見したような応用分野，すなわち注入同期や相互同期等の古典的テクニックの LSI 等先端テクノロジーでのリバイバルも，この 10 年間，相当に進展している．その動向は例えば，この数年の国際会議 ISSCC（LSI 技術のオリンピック）での発表論文に如実にあらわれている [5] [6]．

要するに，この分野は 10 年の間に基盤と応用が整備され，新たな枠組みが登場するまでに成熟したといえる．したがって，工学の現実的問題にも適用可能な基礎理論や手法・アルゴリズムも，真剣に検討されて良い時期であるだろう．本稿は，そのような試みに向けた最近の動向のひとつを紹介する．

2. 同期・引き込み現象と変分解析

上記の ISSCC で発表されている最新の成果は，ひとことで言えば，注入同期（＝引き込み）の高周波数化・微細化・省エネ化であるといえる．この注入同期は，非線形問題の原点ともいえるファンデルポル発振器等においても膨大な研究の蓄積がある．そこに，いまだ新しい理論研究の芽があるとは，通常あまり期待できないのではなかろうか．ところが，筆者は，サーカディアンリズム（概日時計）の理論研究を行なう過程で，その新しい研究の芽がいくらか残っていることを指摘した [7]．その後，郡氏の紹介により，筆者は心臓ペースメーカをバックグラウンドにもつ物理学者原田氏と化学振動子をバックグラウンドにもつ化学者 Kiss 氏と合流し，この研究の芽は予想以上に深い根をもつことを確信するようになった．以下では，その導入編を解説する．

一般に，ファンデルポル発振器を含む非線形振動子の安定した同期・引き込み過程は，リミットサイクル近傍でのダイナミクスに帰着される．したがって，単一振動子の同期・引き込みに注目する場合，振動子がどれ程複雑で高次元のダイナミクスをもつとしても，その引き込み過程は，以下の簡潔な 1 変数の非線形方程式により記述される [8]．

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + Z(\psi)f(\Omega t), \tag{1}$$

ここに ψ $(\in [0, 2\pi))$，ω はそれぞれ振動子の発振位相，自然周

波数を表し，Z と f はそれぞれ振動子の位相応答曲線，振動子への周期的注入信号を表す．また Ω は周期的注入信号の周波数を示している．上記の $Z(\psi)$ は多くの場合何らかの手段で得られるものであり，ここでは既知であると仮定する．いま，周波数の離調 $\Delta\omega(=\Omega-\omega)$ が充分小さければ，(1) に速い動きに関する平均化が適用され，次の方程式に簡約化される．

$$\frac{d\phi}{dt}=\Delta\omega+\Gamma(\phi), \tag{2}$$

ここで ϕ は $\phi=\psi-\Omega t$ を示す．また相互作用関数 $\Gamma(\phi)$ は注入信号 f と位相応答曲線 Z から，$\Gamma(\phi)=\langle Z(\theta+\phi)f(\theta)\rangle$ として与えられる．ここに，θ は Ωt，$\langle\cdot\rangle$ は θ についての周期 2π での平均: $\langle\cdot\rangle\equiv(2\pi)^{-1}\oint\cdot\, d\theta$ を示す．

外部信号 f に対し，同期・引き込みが成立するために，次の条件：$d\phi/dt=\Delta\omega+\Gamma(\phi)=0$ が必要である．つまり，f が与えられれば，この条件を満たし引き込み状態が得られる $\Delta\omega$ の値の範囲，すなわちロッキングレンジが決まる．このロッキングレンジは，図 1 のように $\Gamma(\phi)$ の $\phi=\phi_+$ での極大値 $\Gamma(\phi_+)$ と $\phi=\phi_-$ での極小値 $\Gamma(\phi_-)$ により与えられる．すなわち，ロッキングレンジの幅を $R[f]$ とすると，$R[f]=\Gamma(\phi_+)-\Gamma(\phi_-)$ となる．このように，入力信号 f に対し，$\Gamma(\phi)$ が決まり，この Γ の極大値と極小値の差として $R[f]$ が定義される．したがって $R[f]$ はあるクラスの関数 f に対する非線形汎関数となる．

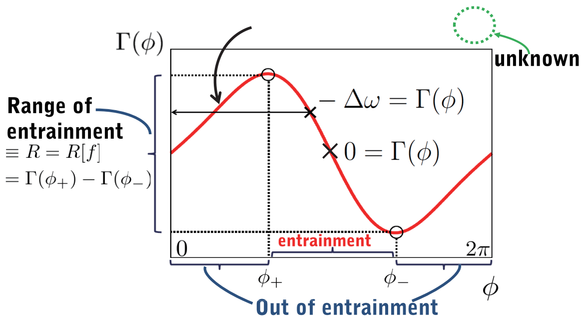

図 1　ロッキングレンジ（引き込み周波数帯）$R[f]$ の定義

例えば図 2 の例は，CMOS リングオシレーターに異なる 3 種類の入力信号 f を与えた場合の SPICE シミュレーターの計算結果を示している．この例では，グラフの縦軸として，f の 1 周期での 2 乗平均を表示している．いま，この f の 2 乗平均の値を一定として，異なる f に対する $R[f]$ を求めると，これは明らかに f により異なる値をもち，各々相当の差が生じることが分かる．

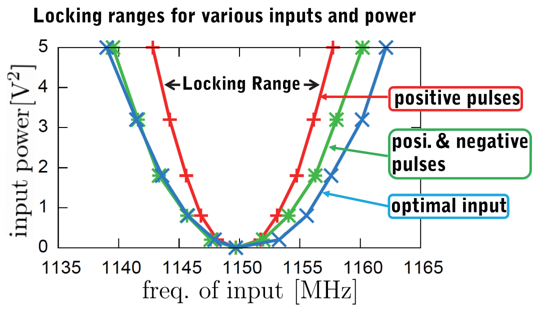

図 2　異なる入力信号に対するロッキングレンジ（引き込み周波数帯）の比較（CMOS リングオシレーターの場合）

この例が示唆するように，f を適切に設定することによって引き込み可能な周波数帯（＝ロッキングレンジ）が相当に拡大されるのではないだろうか？もし，そうだとすれば，その上限を与える最適な入力信号（$=f_{\rm opt}$）は，どのように実現されるのだろうか？この問に対する一つの定式化と解答は，以下の通りである．

まず f の 2 乗平均値を（小さな）一定値 P とする．この P を満たす f で $R[f]$ を極大にする f を求めたい．これは次の汎関数の極値問題により与えられる．

$$\mathcal{S}[f]\equiv R[f]-\lambda(\langle f^2\rangle-P), \tag{3}$$

ここに λ はラグランジの未定乗数を示す．この $\mathcal{S}[f]$ の極値を与える f_* は，上記の最適な入力信号 $f_{\rm opt}$ の候補となる．そして，この f_* は $\mathcal{S}[f]$ の第 1 変分 $\delta\mathcal{S}$ が 0 となり，かつ第 2 変分 $\delta^2\mathcal{S}$ が負となる条件より，次のように求まる．

$$f_*(\theta)=(2\lambda)^{-1}\{Z(\theta+\phi_+)-Z(\theta+\phi_-)\}. \tag{4}$$

以上のラグランジの未定乗数 λ は，(4) を f のパワー＝一定の制約条件 ($\langle f_*^2\rangle-P=0$) に代入することにより，次の通り決定する．$\lambda=(1/2)\sqrt{Q/P}$，但し $Q\equiv\langle\{Z(\theta+\phi_+)-Z(\theta+\phi_-)\}^2\rangle$．さらに，(4) の f_* は自動的に次を満たすことも分かる：$\langle f_*\rangle=0$．

以上は，f_* の満たす必要条件である．以下では逆に f_* が $f_{\rm opt}$ となる十分条件を検討する．まず，(4) より Γ は次のように与えられる．

$$\Gamma(\phi)=\sqrt{P/Q}\,\langle Z(\theta+\phi)\{Z(\theta+\phi_+)-Z(\theta+\phi_-)\}\rangle. \tag{5}$$

ここで，$\phi=\phi_+$ の極大値と $\phi=\phi_-$ での極小値は，その定義より次を満たすはずである．

$$\Gamma'(\phi_\pm)=0,\ \Gamma''(\phi_+)<0,\ \text{かつ}\ \Gamma''(\phi_-)>0. \tag{6}$$

したがって (6) の第一式と (5) より，次の等式が成立する．

$$\langle Z'(\theta+\phi_+)Z(\theta+\phi_-)\rangle=\langle Z'(\theta+\Delta\phi)Z(\theta)\rangle=0. \tag{7}$$

ここで，位相変数 ϕ のシフトに関する任意性を消去するため，$\Delta\phi\equiv\phi_+-\phi_-$ を導入した．

この条件 (7) は，与えられた Z に対し，(4) の f_* が確かに最適入力 $f_{\rm opt}$ になるための条件である．ただし，(7) の自明な解 $\Delta\phi=0$ は，あらかじめ取り除いて考える．この $\Delta\phi=0$ に対しては，(5) より $\Gamma(\phi)\equiv0$ となり，引き込みが定義されないからである．

一方，(7) の自明でない解は確かに存在し得る．これは，$\partial\langle Z'(\theta+\Delta\phi)Z(\theta)\rangle/\partial\Delta\phi|_{\Delta\phi=0}=-\langle Z'(\theta)^2\rangle<0$，かつ $\langle Z'(\theta+\Delta\phi)Z(\theta)\rangle$ は一般に $\Delta\phi$ の有界な周期関数と仮定されることから従う．特に，Z が例えば 2 回微分可能な滑らかな関数とすれば，$\Delta\phi=\pi$ という解が（システムのパラメータと無関係に）必ず存在することも分かる．この $\Delta\phi=\pi$ の解を generic と呼ぶことにする．

簡単かつ一般性を失わない仮定として，以上のように Z が

ある程度滑らかであり，さらに変分の対象となる f も同じく滑らかな関数を想定し，適当なノルムを導入する [9]．その結果，(7) の解は $\Delta\phi=\pi$ の generic 解に加え，non-generic な解も存在し得て，解の個数は高々有限個となると期待 (あるいは仮定) されよう．したがって，それらの解 $\Delta\phi$ に対応する f_* に対し，各々 $R[f_*]$ を評価し，最大となる f_* を $f_{\rm opt}$ と決めればよい．

以上のアルゴリズムにより，f は，しかるべきノルム空間に制限されているものの，その中での最適な $f_{\rm opt}$ が (4)，(7) により，与えられる．この結果の数値検証例，化学振動子系での検証は [10] を参照のこと．

3. 非線形理論のひとつのメシの食い処

ファンデルポル発振器，さらに位相同期回路（PLL）の登場以来，既に 4 分の 3 世紀が経過しようとしている．その間，常に引き込み能力の向上という課題が工学の現実的問題として在る．以上の結果は，あくまでも弱入力という制限はあるものの，この問題に対し，クリアな一般理論を提供する第一歩を与えている．さらに，この枠組み（＝定式化＋解析手法）は，自然に以下の課題を提示している．

- ノイズの存在する下での引き込みの最大・最適化

最近の秦，中尾による成果は，この方向にも未開拓な領域があることを示している．

- 集団同期における同期パターン形成の最適化

この方向においても，筆者らは自明でない結果と応用の広がりを認めている．詳細は別報に譲る．

- 以上の成果の現実的問題への適用，応用

現在，サーカディアンリズム制御，ならびにパワエレ等への応用を開拓中である．特に，関屋らによる E 級発振器の研究とのマッチングが期待される．

非線形問題の定義とは何であろうか？あくまでも個人的にではあるが，これは「非線形」な工学の現実的「問題」のサイエンスとしての側面，であると解釈している．だとすれば,「非線形問題」は非線形物理や，あるいは応用数理と似て非なるものである筈だろう．例えば，非線形物理の「王道」を行く蔵本グループの輝かしい成果は，それ自体で完結する一つの宇宙のように筆者には見える．もし，そうならば，その「宇宙」は市井の現実的問題のレベルにも何らかの知恵を与えてくれるのではないだろうか？その「宇宙」と「市井」のギャップにこそ，非線形問題のメシの食い処が広がっていると期待したい．

このような「宇宙」と「市井」のギャップに潜むサイエンスを，現在の通信システムを取り巻くテクノロジーにも見出そうとする発想は極めて自然なものであろう．この 4 月，当 NLP に加え，CCS（複雑コミュニケーションサイエンス研究会）が以下の幹事団の諸氏の尽力により発足した．青野 真士（理研），梅野 健（NICT），岡本 英二（名工大），関屋 大雄（千葉大），田中 久陽（電通大），鳥飼 弘幸（阪大），中尾 裕也（東工大），長谷川 幹雄（理科大）．学会員の皆様のご参加，ご発表を是非ご検討いただきたい．

日頃ご議論戴きます当 NLP，ならびに CCS（複雑コミュニケーションサイエンス研究会）の関係者各位に深謝致します．本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤（B）23360047，および財団法人テレコム先端技術研究支援センターの助成により行われた．

文　献

[1] 田中久陽, “同期現象の科学の最近の進展,” 電子情報通信学会誌, pp.1175–1179，1997.

[2] I. Z. Kiss, C. G. Rusin, H. Kori, and J. L. Hudson, “Engineering Complex Dynamical Structures: Sequential Patterns and Desynchronization,” Science 316, pp.1886–1889, 2007.

[3] Jun-nosuke Teramae and Dan Tanaka, “Robustness of the noise-induced phase synchronization in a general class of limit cycle oscillators,” Phys. Rev. Lett. 93, 204103, 2004.

[4] H. Chiba, “A spectral theory of linear operators on rigged Hilbert spaces under certain analyticity conditions", (preprint). http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ chiba/paper/spectrum1.pdf

[5] K. Yamamoto and M. Fujishima, “70-GHz CMOS harmonic injection-locked divider,” IEEE ISSCC Dig. Tech. Papers, p.600–601, 2006.

[6] K. Kawasaki, Y. Akiyama, K. Komori, M. Uno, H. Takeuchi, T. Itagaki, Y. Hino, Y. Kawasaki, K. Ito, and A. Hajimiri, “A millimeter-wave intra-connect solution,” IEEE ISSCC Dig. Tech. Papers, pp.414–415, 2010.

[7] 永田憲章, 田中久陽, “位相方程式によるショウジョウバエ概日時計システムの引き込み同調の解析,” 電子情報通信学会論文誌 A, VOL.J88-A, No.4, pp.535–543, 2005.

[8] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillators Waves and Turbulence* (Dover, Mineola, New York, 2003).

[9] I. M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations* (Dover, Mineola, New York, 2000).

[10] Takahiro Harada, Hisa-Aki Tanaka, Michael J. Hankins, and István Z. Kiss, “Optimal Waveform for the Entrainment of a Weakly Forced Oscillator,” Phys. Rev. Lett. 105, 088301, 2010.