

論 文

多くのパラメータをもつダイナミカルシステムの特異点解析
——非対称結合神経回路網モデルへの応用——

正員 田中 久陽[†] 非会員 岡田 淳[†]
正員 大石 進一^{††} 正員 堀内 和夫[†]

Singular Point Analysis for Dynamical Systems with Many Parameters
——An Application to an Asymmetrically and Densely Connected
Neural Network Model——

Hisa-Aki TANAKA[†], Member, Atsushi OKADA[†], Nonmember, Shin'ichi OISHI^{††}
and Kazuo HORIUCHI[†], Members

あらまし パンルベテストに代表される特異点解析は、微分方程式の複素平面上における動く特異点の周りで一般解の局所的展開により、系の積分可能性、不可能性、更にカオスとの関係を解析する手法として再発見され、近年、盛んに研究がなされてきた。本論文では、そのダイナミックスの解析手法が期待される非対称結合で密結合の神経回路網モデルに、特異点解析を適用する問題について検討を行い、系が積分可能あるいは積分不可能となるための結合パラメータに関する条件を考察する。系の積分可能性のある十分条件が得られる。更に特異点解析を実行する際、従来問題であった計算上の困難を精度保証付き数値計算により回避し、所与の結合パラメータに対し、系の積分不可能性の数値的厳密検証も可能となる。これらの解析の応用として、そのもとで解が規則的あるいは不規則的振動を呈する結合パラメータの設定を行うことが可能となり、これを数値実験により検証する。

キーワード 特異点解析(パンルベテスト)、高次元力学系、非対称結合神経回路網モデル、精度保証付き(自己検証的)数値計算

1. ま え が き

複数の要素が互いに密に結合され、それらの間に、ある非線形相互作用が働き、自律的に時間発展する系は、さまざまな分野に現れる。非線形回路、あるクラスのニューラル系、古典力学の多体問題などは、そのよく知られた例である。これらはいずれも多数のパラメータをもち、それらに対応して多様なダイナミックスを内包する。このような複雑な系を理解し応用するために、そのダイナミックスが方程式のパラメータにいかにか依存するかを明らかにすることは基本的で重要な問題の一つである。その際、系の平衡点およびその安定性に関しては、有限次元方程式の問題に着き

る。一方、平衡点から離れた大域的なダイナミックスは、多様かつ複雑であり、その解析は容易でない。多くの場合、数値実験に頼らざるを得ない現状であり、特に上記のような多くのパラメータをもつ系に対しては、そのパラメータの任意性のために、相当の試行錯誤が必要となる。ところが、一般に複素時間平面上に動く特異点をもつタイプの非線形微分方程式は特異点解析と呼ばれる手法により、特異点の周りの局所的な解の性質の様子と積分可能性あるいはカオスといった解の大域的な挙動を関係づけることが可能であることが知られている⁽¹⁾。この手法は前世紀のパンルベやコワレフスカヤの仕事に始まり、3. および付録で説明するように、現在この手法はパンルベテストあるいは吉田の定理⁽⁶⁾として復活している。この手法は有限回の代数的操作で計算が実行される利点をもち、数式処理による実現がなされている⁽²⁾。本論文では特異点解析を用いて、そのダイナミックスに興味をもたれる非対

[†] 早稲田大学理工学部電子通信学科, 東京都

^{††} 早稲田大学理工学部情報学科, 東京都

School of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, 113 Japan

称結合かつ密結合のニューロダイナミクス⁽⁴⁾について解析を行う。4.ではパルルベテストの適用を行う。その結果、ある結合パラメータの条件のもとで積分可能なニューロダイナミクスの特定に至る。また一般に、密に結合された場合においては、パルルベテストに通る(系の積分可能と予想される)ためには、系の結合パラメータに対する制約条件の数が非常に多くなることがわかる。従って、積分可能性が予想される場合は非常に限られることがわかる。そこで5.では逆に、密に結合された系の積分不可能性を吉田の定理を適用して検証する。その過程において、従来問題であった特異点解析の実行上の困難⁽²⁾が生じるが、これを精度保証付き数値計算^{(9),(10)}により回避し、系の積分不可能性の数値的な厳密検証が可能となることを示す。6.では、これらの解析の応用として、非常に広範なパラメータ空間から、そのもとで解が規則的あるいは不規則的振動を呈する結合パラメータの設定を行うことが可能となることを数値実験により検証する。

2. 問題の背景

ニューロダイナミクスを解析する際、次のようなモデルが用いられてきた⁽³⁾。

$$\text{モデル 1: } \dot{u}_i = -\frac{u_i}{\tau} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \tanh u_j + h_i \quad (1)$$

$$\text{モデル 2: } \dot{u}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tanh u_j \quad (2)$$

但し $i=1, \dots, n$. 式(1), (2)において, u_i はニューロンの内部電位, h_i は静止電位, a_{ij} は結合パラメータを表している。従来のホップフィールドモデルでは $a_{ij} = a_{ji}$ であり, 対称結合であったが, 本論文では必ずしも $a_{ij} = a_{ji}$ の成立しない非対称結合のネットワークを取り扱う。モデル1は内部電位の減衰項を含み, 内部電位が無限大に発散することを防いでいる。モデル2はダイナミクスを解析する目的から見ると, 系の散逸性に起因するリミットサイクルのような漸近的性質を解析する際, 有効であろう。一方, モデル2は式(1)における減衰項において, τ を無限大としたものであり, 内部電位が無限大に発散する場合を許す。そのため, 実際の回路に実装する際には困難となろうが, 理論的な取扱いを行う際, しばしば有効である⁽³⁾。ここで我々の目的はニューロダイナミクスの平衡点を離れた大域的挙動, すなわち解の規則的, 不規則振動, 第1積分の存在, 非存在および系のもつ多数のパラメータへの依存性を明らかにすることである。そのために

モデル2を採用し, これに3.および付録で説明する特異点解析による解析を行う。式(2)において静止電位 h_i , 自己結合 a_{ii} の存在は特異点解析の際に何ら支障をきたさないが, ここでは簡単のために存在しない場合を扱う。また, モデル1で記述されるリミットサイクル等の漸近的性質はモデル2で得られた結果をもとに摂動論的に取り扱える可能性があり, 数値実験により, モデル2で準周期解が存在するとき, これがモデル1で, 適当な大きさの減衰項 $-(u_i/\tau)$, および自己結合 $a_{ii} \tanh u_i$ の釣合いのもとで保存される場合が確認されている。

3. 特異点解析

一般に非線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad t \in R \quad (3)$$

で, f の成分 f_i が x の有理関数であるクラス方程式を考え, 独立変数 t を複素変数 τ として

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x(\tau)) \quad \tau \in C \quad (4)$$

を考える。このとき, 式(3)において実時間上では特異点が存在しない場合でも, 式(4)は複素時間平面上に動く特異点(極, 分岐点)をもち得る。これらの特異点の周りで, (4)の一般解は局所的にローラン(Laurent)展開, Puiseux 展開, または $\log \tau$ の項を含む展開により得られる⁽¹⁾。このような複素平面上での解の動く特異点の周りで局所的な解の展開の性質から系の大域的挙動を解析する方法を総称して特異点解析と呼ぶ。本論文ではパルルベテスト⁽¹⁾, 吉田の定理⁽⁵⁾に基づく解析を行う。

4. 積分可能性の十分条件

系がどのようなネットワーク構造, 結合パラメータのもとで積分可能あるいは積分不可能, 更にはカオス的となるかに興味がある⁽⁴⁾。そこでまず積分可能となる条件を考える。系が積分可能であることがわかれば, 代数的操作と求積法によって方程式は解けてしまい, 系はカオス的ではあり得ないことが言える。

4.1 系の対称性が低い場合

素子数2で自己結合をもたない場合, 一般に方程式(2)は次のようなハミルトニアンをもつ自由度1のハミルトン系であり, 積分可能である。

$$H(u_1, u_2) = a_{21} \log(\cosh(u_1)) - a_{12} \log(\cosh(u_2)) \quad (5)$$

式(2)は, 変数変換

$$x_i = \tanh(u_i) \quad i=1, \dots, n \quad (6)$$

により,

$$\dot{x}_i = (1-x_i^2) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad i=1, \dots, n \quad (7)$$

となるが,

$$n=2, [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

であるとき, x_i はだ円関数により表示されることが示されている⁽⁸⁾. 一般に方程式(4)が動く特異点として極のみをもつとき方程式は Painlevé 性をもつと言うが, 式(7)は解 x_i が動く特異点として1位の極のみをもつ解析関数であり, Painlevé 性をもつ. 方程式(7)は1階連立非線形常微分方程式であるので, もし式(7)が Painlevé 性をもつならば, 式(7)の一般解は極の周りで十分な数の任意定数をもつローラン展開により

$$x_i(\tau) = \tau^{g_i} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \tau^j \quad \tau = t - t_0, \quad i=1, 2 \quad (9)$$

と表現されることが言える. しかしここでは, パンルベテストの実行手順の説明のために, 条件(8)のもとで方程式(7)にパンルベテストを適用する. その手続きは次のように3段階からなる.

[step 1] ドミナント項 $a_{i0}\tau^{g_i}$ (ローラン展開の最下位の項)の決定を行う.

式(7)に

$$x_1 = a_{10}\tau^{g_1}, \quad x_2 = a_{20}\tau^{g_2} \quad (10)$$

を代入して次を得る.

$$(g_1, g_2) = (-1, 0), \quad (a_{10}, a_{20}) = (1/a, 1), \quad (-1/a, -1) \quad (11)$$

[step 2] レゾナンス r (係数が任意定数となる展開項の位置)を決定する.

$$x_i = a_{i0}\tau^{g_i} + a_{ir}\tau^{g_i+r} \quad i=1, 2 \quad (12)$$

を式(7)に代入し, τ のべき順に展開係数を整理する. a_{ir} が任意性をもつためには r が次を満たすことが必要である.

$$(r-1+2a_{10}a_{20}a)(r-2a_{10}a_{20}a) = (r+1)(r-2) = 0 \quad (13)$$

故に, $r = -1, 2$

[step 3] レゾナンスにおいて解の展開が矛盾をきたさないことを確認する.

式(7)に, 式(9)を代入することによりレゾナンス $r=2$ において, 係数 a_{12}, a_{22} は制約条件:

$$3a_{12} + a_{22}/a = 0 \quad (14)$$

のもとで任意性をもつことがわかる. $r=-1$ は初期時刻の任意性を反映している.

以上の結果, 例えば $(a_{10}, a_{20}) = (1/a, 1)$ に対し x_1, x_2 はそれぞれ

$$x_1(\tau) = (1/a)\tau^{-1} + a_{12}\tau - (aa_{12}^2 + 3a_{12}a_{22} - aa_{22} + a_{22}^2/2a)/5\tau^3 + \dots \quad (15)$$

$$x_2(\tau) = 1 + a_{22}\tau^2 + (aa_{12}a_{22} + a_{22}^2/2)\tau^4 + \dots \quad (16)$$

のようにすべての展開係数を下から再帰的に決定でき, かつ十分な数の任意係数 a_{12}, a_{22} をもつことがわかる. これは x_1, x_2 が実はだ円関数で表示できるという事実をローラン展開を通して見ていることにほかならない.

上で説明した手順を素子数3の系に適用すると次を得る.

[step 1] ドミナント項 $a_{i0}\tau^{g_i}$ の決定

ここでは結果のみを述べる.

case (1) : $(g_1, g_2, g_3) = (0, -1, -1)$

$$(a_{10}, a_{20}, a_{30}) = (\pm 1, \pm a_{21}^{-1}, \pm a_{31}^{-1})$$

case (2) : $(g_1, g_2, g_3) = (0, 0, -1)$

$$(a_{10}, a_{20}, a_{30}) = (\pm 1, \pm 1, (a_{31}a_{10} + a_{32}a_{20})^{-1})$$

case (3) : $(g_1, g_2, g_3) = (0, -1, 1)$

$$(a_{10}, a_{20}, a_{30}) = (\pm 1, (a_{21}a_{10})^{-1}, a_{31}a_{10})$$

(注) これ以外にもドミナントのオーダ g_i が有理数になる場合がある. それらのいくつかに対して十分な数の任意定数を含む Puiseux 展開が可能である.

[step 2] レゾナンス r の決定

[step 1] の三つの場合それぞれに対して,

$$\text{case (1)} : (r+1)^2 \left\{ r + 2 \left(\frac{a_{13}}{a_{31}} + \frac{a_{12}}{a_{21}} \right) \right\} = 0$$

$$\text{case (2)} : (r+1) \left(r + \frac{2a_{10}a_{13}}{a_{31}a_{10} + a_{32}a_{20}} \right) \times \left(r + \frac{2a_{20}a_{23}}{a_{31}a_{10} + a_{32}a_{20}} \right) = 0$$

$$\text{case (3)} : (r+1)^2 \left(r + \frac{2a_{12}}{a_{21}} \right) = 0$$

が成立する.

[step 3] レゾナンスにおいて解の展開が矛盾をきたさないことを確認

以下に示す仮定のもとで, case(1), (2), (3) に対して与えられた結合パラメータ a_{ij} について, 解の展開はレゾナンスで矛盾をきたさないことが確認される.

[仮定] 方程式(7)は従属変数の置換による対称性をもたず, 解の展開は上で行った展開だけを考えれば十分である場合を考える. すなわち,

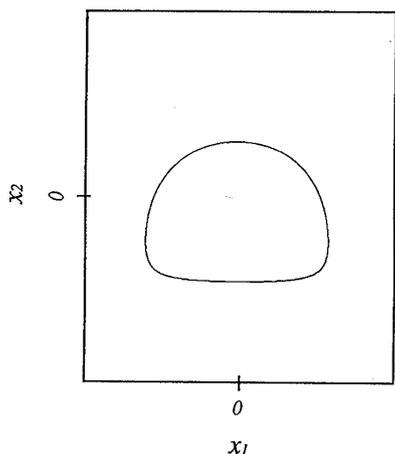


図1 case(1)で $(a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}) = (0.2, -0.3, 0.2, 0.1)$ における周期解

Fig.1 Periodic solution of case(1) with $(a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}) = (0.2, -0.3, 0.2, 0.1)$.

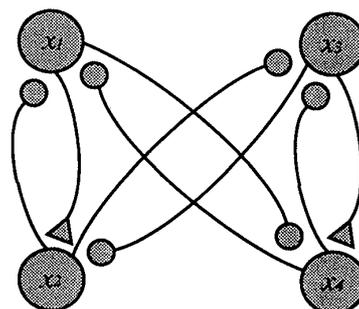


図2 ニューラル振動子の相互結合
Fig.2 Mutually coupled neural oscillators.

$$\text{case(1)} : r = -2 \left(\frac{a_{12}}{a_{21}} + \frac{a_{13}}{a_{31}} \right)$$

は非負整数で結合パラメータ a_{ij} は $a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{31}$ を除き 0.

$$\text{case(2)} : r = -\frac{2a_{10}a_{13}}{a_{31}a_{10} + a_{32}a_{20}}, -\frac{2a_{20}a_{23}}{a_{31}a_{10} + a_{32}a_{20}}$$

は非負整数で結合パラメータ a_{ij} は $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ を除き 0.

$$\text{case(3)} : r = -\frac{2a_{12}}{a_{21}}$$

は非負整数で結合パラメータ a_{ij} は a_{12}, a_{21} を除き 0. この仮定のもとで、解の展開は上で行った展開だけを考えれば十分となる. このとき case(3) は上記の $n=2$ の場合に相当し積分可能である. case(1), (2) に対して独立な二つの第 1 積分が次のように得られる.

$$\text{case(1)} : (1+x_2)^{a_{31}}(1-x_2)^{-a_{31}}(1+x_3)^{-a_{21}}(1-x_3)^{a_{21}} \\ (1-x_1^2)^{-a_{21}a_{31}}(1-x_2^2)^{a_{12}a_{31}}(1-x_3^2)^{a_{21}a_{13}}$$

$$\text{case(2)} : (1+x_1)^{a_{23}}(1-x_1)^{-a_{23}}(1+x_2)^{-a_{13}}(1-x_2)^{a_{13}} \\ (1-x_1^2)^{a_{31}a_{23}}(1-x_2^2)^{a_{13}a_{32}}(1-x_3^2)^{-a_{13}a_{23}}$$

すなわち, case(1), (2), (3) ともに積分可能である. 積分可能系のダイナミックスの一例として, case(1) において, $a_{12}=0.2, a_{13}=-0.3, a_{21}=0.2, a_{31}=0.1$ の場合の軌道を図 1 に示す. このとき解は任意の初期値に対して周期解であることが言える.

(注) 存在する第 1 積分を解の展開から求める手続きは現在知られておらず, 直接, 方程式(7)から求めねばならない. 後の例 3 での第 1 積分も同様であり, これらは比較的容易に(7)から導出される.

4.2 系が多くの対称性をもつ場合

上記のようにレゾナンス r に現れない結合パラメータ a_{ij} を 0 とする仮定のもとでは, 系のネットワーク構造がスパースで, 方程式が従属変数の置換のもとで不変となる対称性は低く, 解の展開のパターンは限られる. ところが, 系が多くの個数の結合パラメータ $a_{ij} \neq 0$ を有する密結合のネットワークにおいて従属変数の置換のもとでの対称性を多くもつ場合には状況は複雑になる. この場合, パンルベテストを行うためには可能なドミナント項, すなわち系のもつ対称性それぞれに対応するドミナント項すべてに対して, 解の展開を行わなければならない. このことはその方程式がパンルベテストに通るためには, レゾナンスが非負整数であるという要請による結合パラメータ a_{ij} に課される条件の数が増えることを意味する. 従って一般に素子数, 対称性の数が増すにつれ, これらの条件をすべて満たす結合パラメータ a_{ij} の組の数(すなわち, 積分可能と予想される系の場合の数)は結合パラメータ a_{ij} の作るパラメータ空間内でわずかな部分を占めるだけとなることが予想される. このような状況は次の例 1, 2 により示される.

(例 1) 式(7)において素子数 $n=4$ で結合パラメータが自己結合 $a_{ii}=0$ で, $a_{13}=a_{24}=a_{31}=a_{42}=0$ である場合を考える. 特に, $(a_{12}, a_{21}, a_{34}, a_{43}) = (1, -1, 1, -1)$ であるとき, これは 4.1 で議論した積分可能な振動子を図 2 に示すように相互に結合した系を記述する.

存在するすべてのドミナント項 $a_{i0}r^{g_i}$ に対応するオーダの組 (g_1, \dots, g_4) は系の対称性を考慮して次のように得られる.

$$(g_1, \dots, g_4) = (-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0) \\ (0, 0, 0, -1), (-1, 0, -1, 0), (0, -1, 0, -1)$$

(注) ある特別な結合パラメータ a_{ij} に対して, $(g_1,$

$\dots, g_4) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ が可能な場合がある。
それぞれの (g_1, \dots, g_4) に対応するドミナント項の係数 $(a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40})$ は

- (1) $((a_{10}a_{20} + a_{14}a_{40})^{-1}, \pm 1, \text{任意}, \pm 1)$
- (2) $(\pm 1, (a_{21}a_{10} + a_{23}a_{30})^{-1}, \pm 1, \text{任意})$
- (3) $(\text{任意}, \pm 1, (a_{32}a_{20} + a_{34}a_{40})^{-1}, \pm 1)$
- (4) $(\pm 1, \text{任意}, \pm 1, (a_{41}a_{10} + a_{43}a_{30})^{-1})$
- (5) $((a_{12}a_{20} + a_{14}a_{40})^{-1}, \pm 1, (a_{32}a_{20} + a_{34}a_{40})^{-1}, \pm 1)$
- (6) $(\pm 1, (a_{21}a_{10} + a_{23}a_{30})^{-1}, \pm 1, (a_{41}a_{10} + a_{43}a_{30})^{-1})$

で与えられ、各々の場合についてレゾナンス r の満たす代数方程式は以下のようになる。

- (1) $r(r+1)\left(r + \frac{2a_{21}a_{20}}{a_{12}a_{20} + a_{14}a_{40}}\right) \times \left(r + \frac{2a_{41}a_{40}}{a_{12}a_{20} + a_{14}a_{40}}\right) = 0$
- (2) $r(r+1)\left(r + \frac{2a_{12}a_{10}}{a_{21}a_{10} + a_{23}a_{30}}\right) \times \left(r + \frac{2a_{32}a_{30}}{a_{21}a_{10} + a_{23}a_{30}}\right) = 0$
- (3) $r(r+1)\left(r + \frac{2a_{23}a_{20}}{a_{32}a_{20} + a_{34}a_{40}}\right) \times \left(r + \frac{2a_{43}a_{40}}{a_{32}a_{20} + a_{34}a_{40}}\right) = 0$
- (4) $r(r+1)\left(r + \frac{2a_{41}a_{10}}{a_{41}a_{10} + a_{43}a_{30}}\right) \times \left(r + \frac{2a_{34}a_{30}}{a_{41}a_{10} + a_{43}a_{30}}\right) = 0$
- (5) $(r+1)^2\left(r + \frac{2a_{21}a_{20}}{a_{12}a_{20} + a_{14}a_{40}} + \frac{2a_{23}a_{20}}{a_{32}a_{20} + a_{34}a_{40}}\right) \times \left(r + \frac{2a_{43}a_{40}}{a_{32}a_{20} + a_{34}a_{40}} + \frac{2a_{41}a_{40}}{a_{12}a_{20} + a_{14}a_{40}}\right) = 0$
- (6) $(r+1)^2\left(r + \frac{2a_{34}a_{30}}{a_{41}a_{10} + a_{43}a_{30}} + \frac{2a_{32}a_{30}}{a_{21}a_{10} + a_{23}a_{20}}\right) \times \left(r + \frac{2a_{12}a_{10}}{a_{21}a_{10} + a_{23}a_{20}} + \frac{2a_{14}a_{10}}{a_{41}a_{10} + a_{43}a_{30}}\right) = 0$

この場合、(1)から(4)においてすべてのレゾナンス r が非負整数(あるいは -1)ならば(5)、(6)におけるレゾナンスも非負整数になることがわかる。すなわち、パンルベテストに通るためには、結合パラメータ a_{ij} に(1)から(4)における r がすべて非負整数(あるいは -1)になる条件が課されることになる。多少の計算で、これらを満足する a_{ij} の組は $(a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}) = (1, -1, 1, -1)$ に限られることが示される。このとき方程式(7)は実際に積分可能であることが、独立な3個の積分の存在により示される。

(例2) 式(7)において、素子数 $n=4$ で結合パラメータが対角成分を除きすべて0でない場合を考える。このとき、ドミナント項のオーダの組 (g_1, \dots, g_4) として可能なものは、

$(g_1, \dots, g_4) = (-1, 0, 0, 0)$ およびその要素を並べ換えたもの、

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ およびその要素を並べ換えたもの、

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ およびその要素を並べ換えたもの、更に

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ である(ある特別な結合パラメータに対し、上記の展開が不可能となる場合がある)。

すなわち、最大15通りの展開の仕方が存在し、パンルベテスト(あるいは weak-パンルベテスト⁽⁴⁾)に通るためには例1と同様に、結合パラメータ a_{ij} がレゾナンスが非負整数となる(ドミナント項のオーダが $-\frac{1}{2}$ を含む場合には $\frac{1}{2}$ の整数倍となる)制約条件を満たさねばならない。これは非常に強い制約条件であると言えよう。また $(g_1, \dots, g_4) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ の場合、weak-パンルベテストの [step 1],

[step 2] において、計算上の困難をきたす。この困難については次章で説明され、精度保証付き数値計算により部分的に解決される。

(注) 例2は例1を式の上では特殊な場合として含んでいるが、特異点解析を行う際には、例1において、例2には存在しない解の展開の仕方が存在し、別に扱われねばならない。

それでは一般の n 素子の系で、どのような場合に積分可能となるだろうか。以上の議論より、その数はそれほど多くないことが予想されるが、現在わかっているのは次の定理である。

[定理] 方程式(2)における結合パラメータ a_{ij} のつくる行列のランクが2ならば、系は積分可能。

(証明の概略) 方程式(2)が保存系であることにより、ヤコビの最終乗式は1である。従って、 $n-2$ 個の独立な第1積分が存在すれば系は積分可能となるが、これらの $n-2$ 個の独立な第1積分は行列 $[a_{ij}]$ のランクが2であることから、式(2)または式(7)より容易に構成され、互いに独立であることがわかる。□

5. 積分不可能性の検証とその応用

4.の議論から、密に結合され多くの対称性をもつ系は、ほとんどの結合パラメータ a_{ij} に対して積分不可能となることが予想される。そこで、このような場合に、付録で述べる吉田の定理を適用し、系の積分不可能性を検証する。そのために、まず式(7)を次のスケールリングと極限操作：

$$t \rightarrow \alpha^{-1}t, \quad x_i \rightarrow \alpha^{g_i}x_i, \quad \alpha \rightarrow \infty \quad i=1, \dots, n \quad (17)$$

によって、相似不変系⁽⁶⁾

$$\dot{x}_i = -x_i^2 \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad i=1, \dots, n \quad (18)$$

に帰着する。その上で、付録1.のアルゴリズムを以下のように実行する。まずアルゴリズムの(step 1)において $g_i=1/2$ が成立し、このとき係数 c_i は次の連立代数方程式

$$2c_i \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j = 1 \quad i, j=1, \dots, n \quad (19)$$

により定められる。 $n=3$ では c_i は所与の a_{ij} に対して閉じた形で解を求めることが可能であるが、一般に高次の n に対しては c_i を閉じた形で求めることは不可能である。更に(step 2)において、Kowalevski's exponents (KE) r を定める特性方程式は次のように与えられる。

$$\begin{vmatrix} r + \frac{1}{2} & c_1^2 a_{12} & \cdots & c_1^2 a_{1n} \\ c_2^2 a_{21} & \ddots & \cdots & c_2^2 a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_n^2 a_{n1} & \cdots & c_n^2 a_{nn-1} & r + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

(step 3)において系の積分不可能性を判定するために式(20)から r を求め、れらが有理数、あるいは無理数、複素数であることの判定を行わねばならない。しかしながら式(20)は c_i を陽に含み、かつ c_i を与える式(19)は閉じた形では解けない。すなわち、このアルゴリズムは(step 3)で計算上の困難をきたす。この困難は原理的には代数的に消去法を適用し、式(19)、(20)からすべての c_i を消去することにより克服できるはずであるが、現実的には数式処理を用いても、ほとんど不可能である。その理由は式(19)の根の個数はBézoutの定理により、有限個ならば最高 2^n 個存在することが言え、そのために式(19)、(20)よりすべての c_i を消去して得られる r の多項式の次数は最高 $n2^n$ 次となり得るからである。ところが系の代数的積分不可能性を主張するためには(step 3)において r が一つ

でも虚部をもつことが検証できれば十分である。また付録2.で述べるように r が虚部をもつとき r の値そのものを求めることが意味をもつ場合がある。そこで、我々は上記の代数的、数式处理的アプローチとは異なる数値的アプローチを行う。数式处理的アプローチでは式(20)から r の特性多項式そのものを求め、その根を求める必要があるが、我々の数値的アプローチでは、式(20)を固有値方程式：

$$Kv = rv \quad v \in R^n,$$

$$\text{但し } K \text{ は式(26)で定義される行列} \quad (21)$$

とみなす。式(21)は v の成分の一つを固定すると、他の v の成分と r の n 変数の非線形方程式とみなされるので、これをニュートン法等で解くことを考える。また式(20)に含まれるパラメータ c_i は式(19)を解いて与えられる。ところがこの数値的アプローチを素朴に浮動小数点数上で行うと、

(1) 式(20)は一般に、パラメータ $c_i^2 a_{ij}$ に強く依存する悪条件の問題である。

(2) 式(19)からニュートン法で得られる解は閉じた形では与えられず、近似解に過ぎない。

ために、その結果得られる r は厳密な結果を与えないのみならず、近似解としても信頼できなくなる。しかしながらこれらの問題は精度保証付き数値計算により回避可能である。すなわち、区間演算、ニュートン法の区間版であるKrawczikの反復法を用いることにより、式(19)の解を必要なだけ狭い区間を成分にもつ区間ベクトルで包み込むことができ、真解 c_i を包囲する区間を式(20)に代入し、その結果係数が区間で与えられる固有値問題をKrawczikの反復法^{(9),(10)}を用いて解けばよい。結局、 r は狭い区間で包囲され、その虚部の存在およびその値が厳密に検証される。 r の虚部の値が必要であるとき、この手法は先に述べた数式处理的に r を定める特性方程式を与える方法に比べて計算量の点ではるかに有利である。

本手法の応用として、ニューロダイナミクスにおいて、そのもとで規則的振動または不規則的振動を呈する結合パラメータ a_{ij} の設定例を例3、4を用いて説明する。

(例3) 式(7)において素子数 $n=4$ で結合パラメータ a_{ij} が次のように与えられる場合、すなわち

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & -1.00 & 0.30 \\ -1.00 & 0 & 0.30 & 0.10 \\ -1.00 & 0.30 & 0 & 1.00 \\ 0.30 & 0.10 & -1.00 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

であるとき、特解の係数 (c_1, c_2, c_3, c_4) を定める代数方程式(19)は

$$\begin{aligned} 2c_1(c_2 - 0.1c_3 + 0.3c_4) &= 1 \\ 2c_2(-c_1 + 0.3c_3 + 0.1c_4) &= 1 \\ -0.2c_1c_3 + 0.6c_1c_4 + 0.6c_2c_3 + 0.2c_2c_4 &= 2 \end{aligned} \quad (23)$$

と同値であり、 c_i は任意性を含む。そこで例えば $c_4 = 1$ と固定して残りの c_1, c_2, c_3 を求めると、これらは4組存在することが数値的に検証される。これらの c_i の値を固有値方程式に代入して Kowalevski's exponents r を求めると、 $r \approx -1, 0$ となる KE が存在することがわかる。

そこで、改めて数式処理的に $r=0, -1$ を予想して計算を進めると、結局、 KEr を与える特性方程式は

$$\begin{aligned} r(r+1)(2r^2 + 2r + 400c_1^2c_2^2 + 400c_3^2c_4^2 - 36c_1^2c_2^2 \\ - 36c_1^2c_4^2 - 4c_2^2c_3^2 - 4c_3^2c_4^2 + 1) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

で与えられることがわかり、 $r=0$ は存在する第1積分： $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)^{-1}(1-x_4^2)^{-1}$ に対応することもわかる。しかしながら式(24)は虚数解をもち得るので、この結合パラメータに対しては系は積分可能ではないことがわかる。このときそのダイナミクスは存在する1個の第1積分のために有界であり、規則的振動を呈することが観察される。これに対するポアンカレマップを図3に示す。

(例4) 式(7)において、先の例3の結合パラメータから摂動された場合で、 -1 を除くすべての KE が虚

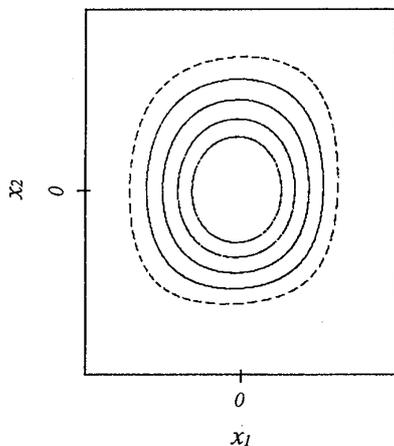


図3 flowの断面図
Fig. 3 Surface of section.

部をもつような結合パラメータ a_{ij} を考える。例えば

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & -0.10 & 0.30 \\ -1.00 & 0 & 0.29 & 0.10 \\ -0.10 & 0.30 & 0 & 1.00 \\ 0.31 & 0.10 & -1.00 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

であるとき、特解の係数 (c_1, c_2, c_3, c_4) は8組存在することが検証される。その1組は：

$$\begin{aligned} c_1 \in [& -0.13392290788627617968, \\ & -0.13392290788627617965] \\ & + i[-0.09881956585742500658, \\ & -0.09881956585742500657] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 \in [& -1.86673405075704882732, \\ & -1.86673405075704882730] \\ & + i[2.55795690331479480121, \\ & 2.55795690331479480123] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 \in [& -0.13444473010428413263, \\ & -0.13444473010428413260] \\ & + i[0.09810844204324196948, \\ & 0.09810844204324196952] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 \in [& -1.88011515037996395754, \\ & -1.88011515037996395748] \\ & + i[-2.54813786063143768441, \\ & -2.54813786063143768438] \end{aligned}$$

で与えられ、これに対応する KEr は $r = -1$

$$\begin{aligned} r \in [& 0.05144436809226889440, \\ & 0.05144436809226889645] \\ & + i[-0.05414396856480379030, \\ & -0.05414396856480378831] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \in [& -0.05144421420194351426, \\ & -0.05144421420194351224] \\ & + i[0.04887350661566986585, \\ & 0.04887350661566986781] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \in [& -1.00000015389032540936, \\ & -1.00000015389032535042] \\ & + i[0.00527046194913389649, \\ & 0.00527046194913395754] \end{aligned}$$

により与えられる。すなわち、初期時刻の任意性に対応する $r = -1$ を除いて、すべて虚部をもつことが厳密に検証された。他の7組の c_i に対しても同様にすべての r が虚部をもつことが検証される。この状況はこの結合パラメータに対し、系は積分不可能であることの証明を与え、更に代数的第1積分が一つも存在しな

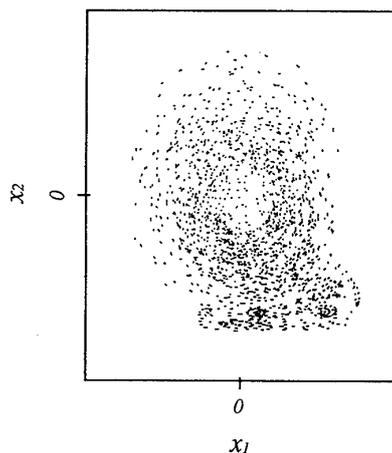


図 4 flow の断面図
Fig. 4 Surface of section.

いことも主張する。この場合、ダイナミックスは不規則振動を呈することが観察される。この状況は例 4 が例 3 と同様に有界なダイナミックスをもつが、第 1 積分が存在しないことから理解される。そのポアンカレマップを図 4 に示す。

6. むすび

本論文では \tanh で与えられる非線形相互作用をもつ非対称結合で密結合のニューロダイナミックスの解析を行った、すなわち積分可能性の条件を与え、積分不可能性の検証法を拡張し、それらによって系のダイナミックスの規則的、不規則的振動の解析的説明を与えた。今後の課題としては 5. で述べたように、従来の特異点解析の実際の適用範囲を超えて、更に高次元の系の解析が期待される。また、カオスを示す系の特異点の分布は複素時間平面上、自然境界を形成する場合やフラクタル状の特異点の集積をもつ場合が知られているが、ここで扱ったニューロダイナミックスはどのような特異点の分布をもつか興味がある。更に、非摂動系(2)において発見された積分可能系、保存量をもとに、減衰項、自己結合およびしきい値を有するニューラル系のダイナミックスを摂動論的に解析を行うことが期待される。

謝辞 有益な御討論を頂いた国立天文台吉田春夫助教授、ならびに株式会社アルプス社石井雅治博士に感謝致します。熱心に御議論頂いた NTT ヒューマンインタフェース研究所内山匡氏、大石研究室藤川英土氏に感謝致します。区間解析ソフトウェアを御提供頂いた大石研究室柏木雅英助手に感謝致します。

文 献

- (1) Ramani A., Grammaticos B. and Bountis T.: Physics Reports 180, No. 3(1989).
- (2) Rand D. W. and Winternitz P.: "ODEPAINLEVE—A MACSIMA Package for Painlevé Analysis of Ordinary Differential Equations", Comput. Phys. Commu., 42, pp. 359-383(1986).
- (3) Uesaka Y.: "Mathematical Aspect of Neuro-Dynamics for Combinatorial Optimization", IEICE Trans., E74, 6(June 1991).
- (4) Kepler T. B., Datt S., Meyer R. B. and Abbott L. F.: "Chaos in A Neural Network Circuit", Physica D, 46, pp. 449-457(1990).
- (5) Yoshida H.: "Necessary Condition for The Existence of Algebraic First Integrals I, II", Celestial Mechanics, 31, pp. 363-399(1983).
- (6) Steeb W. H. and Louw J. A.: "Chaos and Quantum Chaos", World Scientific, pp. 91-92(1986).
- (7) Bountis T., Papageorgiou V. and Bier M.: Physica, 24 D, 292-304(1987).
- (8) 内山 匡, 下原勝憲: "Coupled Oscillators の解析", 信学技報, CAS91-130, NLP91-73(1992).
- (9) Oishi S.: "The Self Validating Numerical Method—A New Tool for Computer Assisted Proofs of Nonlinear Problems", IEICE Trans. Fundamentals, E75-A, 5, pp. 595-612(May 1992).
- (10) Moore R. E.: "A Test for Existence of Solutions to Nonlinear Systems", SIAM J. Numer. Anal., 14, 4, pp. 611-615(1977).

付 録

1. 吉田の定理

相似不変系と呼ばれるクラス方程式に対してパンルベテストの意味は吉田の定理によって説明される⁽⁶⁾。吉田氏による力学系の代数的積分可能性、不可能性に関する定理は次のとおりである。

[定理] (吉田)微分方程式(4)が相似不変系で、右辺 $f_i(x)$ が有理関数であり、代数的第 1 積分をもつならば、この積分に対応する解の展開における Kowalevski's exponents(KE)は有理数であり、式(4)が代数的積分可能ならば、すべての KE は有理数である。その対偶として、一つでも有理数でない KE が存在するとき、系は代数的積分不可能である。□

更に、非相似不変系に対しても変数のスケールリングと極限操作によって相似不変系に帰着できる場合にも上の命題が成立することも示される。以上の吉田の定理より、与えられた相似不変系(あるいは相似不変系に帰着できる非相似不変系)に対する代数的積分不可能性は次のアルゴリズムにより検証される。

(step 0)

$$\text{行列 } K : [K_{ij}] = \begin{bmatrix} x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \\ -\delta_{ij} f_i(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

の行列式が恒等的には0でないことを確認。(条件1)

(step 1) 特解 $x_i = c_i t^{-a_i}$ を求める。 c_i は c_i に関する連立方程式により与えられる。

(step 2) $\text{KE}(=r)$ を求める。 r は行列 K に対する固有値方程式により与えられる。

(step 3) もし少なくとも一つの KE が無理数または複素数となれば、系は代数的積分不可能であることが証明される。有理数である KE が存在するときは、これに対応する代数的第1積分の発見の手掛りとなる。

(注) 最近の石井雅治氏の結果によると、(step 0)の条件1は必ずしも必要でないことが言え、相似不変系において無理数または複素数の KE の存在から、より強く解析的積分の不在が主張される。

2. カオスとの関係

系のパラメータに依存してレゾナンス (KE) が虚数成分をもち始めるとき系にカオスが発生するという数値計算例が報告されている⁽⁶⁾。また、セパトリックスをもつ積分可能系が摂動を受け、そのメルニコフ積分が恒等的には0でなくなるとき、解が無限多価になることを主張する定理、実例が知られている⁽⁷⁾。すなわち、 KE が虚数成分をもつこと、すなわち、解の無限多価性はカオスと密接な関係をもち、カオスの存在の一つの現れであることが知られている⁽¹⁾。

(平成5年9月22日受付, 6年1月19日再受付)



田中 久陽

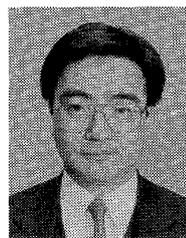
平2早大・理工・電気卒。平4同大大学院修士課程了。現在、博士後期課程在学中。非線形を中心とした情報数理工学の研究に従事。特に通信、信号処理システムにおける非線形性に興味をもつ。計測自動制御学会、日本物理学会、応用数理学会、IEEE各

会員。



岡田 淳

平3早大・理工・電子通信卒。平5同大大学院修士課程了。同年、帝人(株)入社。在学中、ニューラルネットワークの研究に従事。



大石 進一

昭51早大・理工・電子通信卒。昭56同大大学院博士課程了。工博。昭55より同大勤務。現在、理工学部情報学科教授。昭62年3月~63年3月カリフォルニア大パークレイ校客員研究員。非線形を中心とした情報数理工学の研究に従事。



堀内 和夫

昭27早大・理工・電子通信卒。昭32同大大学院博士課程了。工博。昭32より同大勤務。電子通信科教授、非線形システム解析、情報・制御理論、電磁波理論等を専攻。昭52年度論文賞、昭56年度業績賞、平元年度功績賞各受賞。著書「電磁気学」、「電気数学I」、「応用解析」、「応用数理への道」等。IEEE Fellow。